www.yoniivan.com

אלגברה לינארית א'

שיעור 1.

להגיש לפחות 80% מהעבודות. בין 10%-20% מהציון הסופי.

מבחן: 80%

1. סקלרים = מספרים.
2. וקטורים
3. מטריצות

טבעיים: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

שלמים: $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

רציונליים: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, \begin{matrix} n \neq 0 \\ m, n \in \mathbb{Z} \end{matrix} \right\}$

$\xrightarrow{\quad\quad\bullet\quad\quad} x$

ממשיים: $\mathbb{R}$ $\sqrt{2}$

: $+ , - , \cdot ,$

הגדרה:

סדרה של n מספרים עם חשיבות לסדר $(a_1, \dots, a_n)$ נקראת n-יה סדורה (n-וקטור).

רכיבים

$(1, 2, 0) \neq (2, 1, 0)$

שלשה.

$n=2 \Leftarrow$ זוג סדור (a_1, a_2)

$\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$

$\bar{0} = (0, 0, \dots, 0)$

שוויון: $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$ ו- $\bar{b} = (b_1, \dots, b_m)$

$\bar{a} = \bar{b}$ אם ורק אם

א. $m = n$

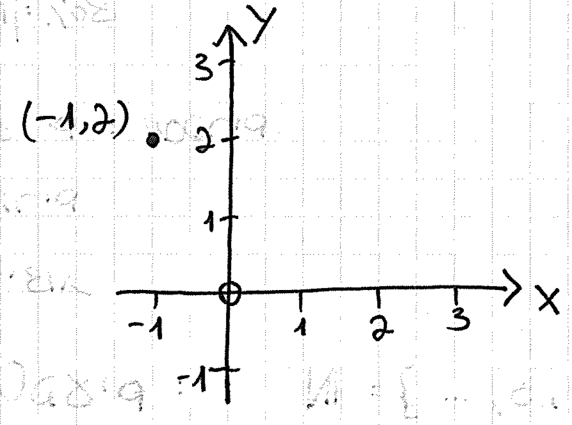
ב. $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$

פעולות עם n-יות (n-וקטורים)

קבוצה של כל ה-n-יות הממשיות: $\mathbb{R}^n$

למשל: $\mathbb{R}^2$ קבוצה של כל הזוגות הסדורים (x,y), $x,y\in\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}^2$: מישור.



$\mathbb{R}^3$: נקודות במרחב תלת-מימדי. (x,y,z)

פעולות עם n-יות:

1. חיבור (חיסור)

$$+\begin{array}{l}\bar{a}=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n\\ \bar{b}=(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^n\end{array}$$

$\bar{a}\pm\bar{b}=(a_1\pm b_1, a_2\pm b_2, \dots a_n\pm b_n)$ (עם חיבור ועם חיסור)

למשל: $(-3,4,0,1)+(1,2,3,4)$
$=(-2,6,3,5)$

$(-3,4,0,1)+(0,1,2)$ לא מוגדר!

תכונות של חיבור:

1. $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$
מתקיים לכל $\bar{a},\bar{b}\in\mathbb{R}^n$

קומוטטיבי
Commutative law

2. $(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$ אין חשיבות לסוגריים!
לכל $\bar{a},\bar{b},\bar{c}\in\mathbb{R}^n$

Associative law
חוק הקיבוץ

3 קיום וקטור - אפס: $\bar{0}=(\underbrace{0,\dots,0}_{n})$

$$\bar{0}+\bar{a}=\bar{a}$$

לכל $\bar{a}\in\mathbb{R}^n$

4 קיום וקטור נגדי:

לכל $\bar{a}=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ קיים $-\bar{a}=(-a_1,\dots,-a_n)$

כך ש- $\bar{a}+(-\bar{a})=0$.

5 $\bar{a}-\bar{b}=\bar{a}+(-\bar{b})$

כפל בין וקטור לבין סקלר:

$\bar{a}=(1,2,3,4)\in\mathbb{R}^4$, $\alpha=2016$

$$\alpha\cdot\bar{a}=(2016,4032,6048,8096)$$

$$\alpha\cdot(a_1,\dots,a_n)=(\alpha\cdot a_1,\alpha\cdot a_2,\dots,\alpha\cdot a_n)$$

$$0\cdot\bar{a}=\bar{0}$$

תכונות של כפל:

Associative law
חוק הקיבוץ

1 $\alpha\cdot(\beta\cdot\bar{a})=(\alpha\cdot\beta)\cdot\bar{a}$

לכל $\alpha,\beta\in\mathbb{R},\bar{a}\in\mathbb{R}^n$

2 $1\cdot\bar{a}=\bar{a}$

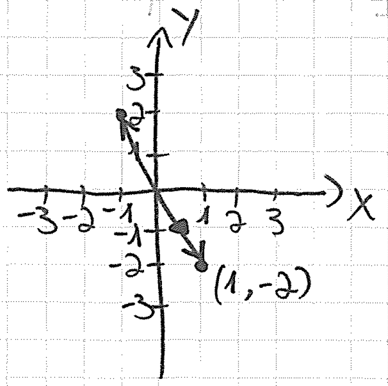
לכל $\bar{a}\in\mathbb{R}^n$

חוקי פילוג (distributive laws)

3 $(\alpha+\beta)\cdot\bar{a}=\alpha\cdot\bar{a}+\beta\cdot\bar{a}$

4 $\alpha\cdot(\bar{a}+\bar{\beta})=\alpha\cdot\bar{a}+\alpha\cdot\bar{\beta}$

משמעות גאומטרית של הפעולות



דוגמא: $\bar{V}=(1,-2)$

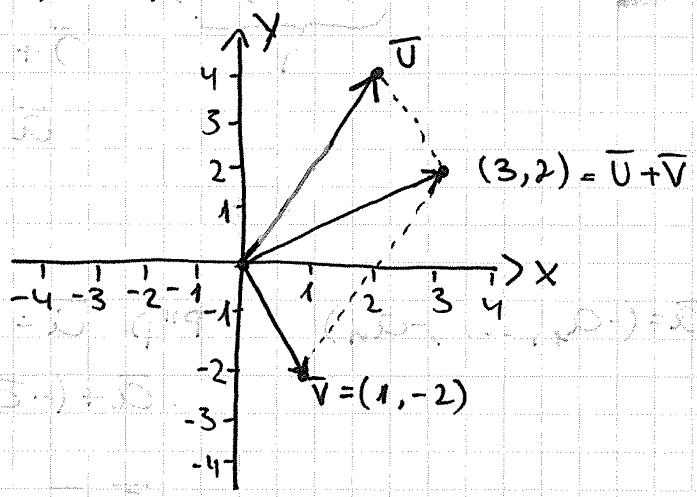
$0.5\cdot\bar{V}=(0.5,-1)$

$-\bar{V}=(-1,2)$

3

חיבור: $\bar{V}=(1,-2)\ ,\ \bar{U}=(2,4)$

$\bar{U}+\bar{V}=(3,2)$



מערכות משוואות לינאריות:

משוואה לינארית:

$$a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n=b$$

חופשי

מקדמים

נעלמים / משתנים

$$x_1+x_2+x_3+x_4=10$$

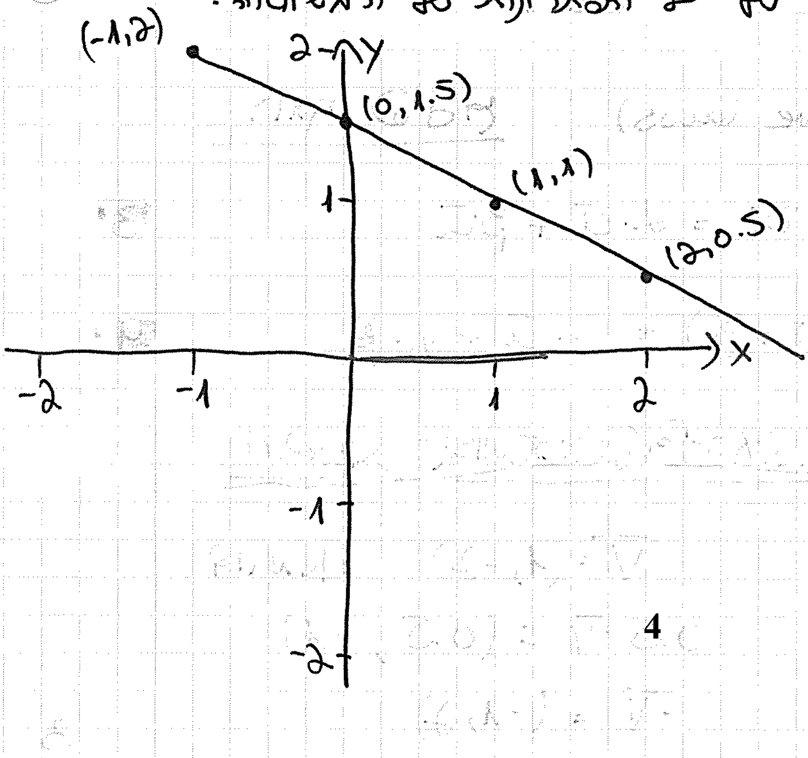
$$x_1=1\ ,\ x_2=2\ ,\ x_3=3\ ,\ x_4=4$$

הוקטור $(1,2,3,4)$ הוא פתרון (פרטי) של המשוואה.

גם פתרון: $(0,0,0,10)$

קבוצת הפתרונות = אוסף של כל הפתרונות של המשוואה.

דוגמא:



$$x+2y=3$$

$$y=\frac{3-x}{2}$$

קבוצת הפתרונות $y=\frac{3-x}{2}$ קו ישר

פתרון כללי: $\left(x, \frac{3-x}{2}\right)$

כאשר x מספר ממשי כלשהו.

או $(3-2y, y)$

ממ"ל (מערכת משוואות ליניארית)

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=10 \\ x_1-x_2+x_3-x_4=8 \end{cases}$$

נעלמים ← 2×4 → משוואות

האם $(1,2,3,4)$ הוא פתרון של הממ"ל? לא מקיים!

$(5,1,4,0)$ פתרון פרטי.

$(4,1,5,0)$

$a\cdot x=b$

$a=0$: $b\neq 0$: $0=$ לא אפס, אין פתרונות! ; $b=0$: $0\cdot x=0$, ∞ פתרונות!

$a\neq 0$: פתרון יחיד $x=\frac{b}{a}$

אלגוריתם חילוף הנעלמים של : Gauss-Jordan.

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x+3y+2z=2 \\ -x+y+2z=-8 \end{cases}$$

השוואת מקדמים:

$R_2 \leftarrow R_2-2R_1$

$$\begin{array}{r} R_2: 2x+3y+2z=2 \\ -\ 2R_1: 2x+4y+6z=2 \\ \hline -y-4z=0 \end{array}$$

קבלנו

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ -y-4z=0 \\ -x+y+2z=-8 \end{cases}$$

$R_3 \leftarrow R_3 + R_1$

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ \boxed{\begin{matrix} -y-4z=0 \\ 3y+5z=7 \end{matrix}} \end{cases}$$

$R_3 \leftarrow R_3 + 3R_2$

מערכת מדורגת!

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ -y-4z=0 \\ -7z=-7 \end{cases}$$

$x=6 \ , \ y=-4 \ , \ z=1$

$(6,-4,1)$ **פתרון יחיד:**

דוגמא 2:

$$\begin{cases} x+2y-3z=-2 \\ 3x-y-2z=1 \\ 2x+3y-5z=-3 \end{cases}$$

$R_2 \leftarrow R_2+3R_1$
$R_3 \leftarrow R_3-2R_1$

$$\begin{cases} x+2y-3z=-2 \\ -7y+7z=7 \\ -y+z=1 \end{cases}$$

$R_2 \leftarrow \frac{1}{7}R_2$

$$\begin{cases} x+2y-3z=-2 \\ -y+z=1 \\ \cancel{-y+z=1} \end{cases}$$

z חופשי, x,y תלויים (קשורים).

$y=z-1$ ומציבים ב-R_1

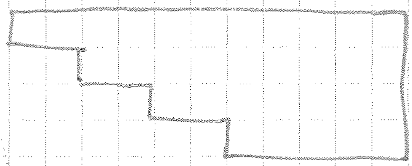
$$x+2(z-1)-3z=-2$$
$$\Downarrow$$
$$z=x$$

$(z, z-1, z)$ פתרון כללי:

אלגברה לינארית - שיעור 2:

ממ"ל ← מדורגת.

אם מקבלים לא־אפס = 0 אז במ"ל אין פתרון.



$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+3x_4=-5 \\ x_1+3x_2+2x_3+5x_4=-2 \\ 3x_1+7x_2+5x_3+14x_4=-4 \end{cases}$$

$R_2 \leftarrow R_2-R_1$
$R_3 \leftarrow R_3-3R_1$

$$\begin{cases} x_1+2x+x_3+3x_4=-5 \\ x_2+x_3+2x_4=3 \\ x_2+2x_3+5x_4=11 \end{cases}$$

$R_3 \leftarrow R_3-R_2$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+3x_4=-5 \\ x_2+x_3+2x_4=3 \\ x_3+3x_4=8 \end{cases}$$

x_1, x_2, x_3 גלויים.

x_4 חופשי.

$R_2 \leftarrow R_2-R_3$
$R_1 \leftarrow R_1-R_3$

$$\begin{cases} x_1+2x_2=-13 \\ x_2-x_4=-5 \\ x_3+3x_4=8 \end{cases}$$

המשתנה הראשון בכל שורה הוא גלוי.

$R_1 \leftarrow R_1-2R_2$

$$\begin{cases} x_1+2x_4=-3 \\ x_2-x_4=-5 \\ x_3+3x_4=8 \end{cases}$$

יש רק קשור אחד בכל שורה.

גלויים בלבד אז:

$$x_1=-3-2x_4$$
$$x_2=-5+x_4$$
$$x_3=8-3x_4$$

← חופשיים בלבד.

$(-3-2x_4, -5+x_4, 8-3x_4, x_4)$

פתרון כללי

1

מטריצות:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+3x_4=-5 \\ x_1+3x_2+2x_3+5x_4=-2 \\ 3x_1+7x_2+5x_3+14x_4=-4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & -2 \\ 3 & 7 & 5 & 14 & -4 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{cccc|c} x & y & z & w & \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & -2 & 3 & 2 \\ & & \boxed{1} & -2 & 1 \\ & & & 0 & 0 \end{array}\right)$$

x,z תלויים.

y,w חופשיים.

מע"ל $m\times n$

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+\dots+a_{1n}\cdot x_n=b_1 \\ a_{21}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+\dots+a_{2n}\cdot x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}\cdot x_1+a_{m2}\cdot x_2+\dots+a_{mn}\cdot x_n=b_m \end{cases}$$

$$a_{ij}$$

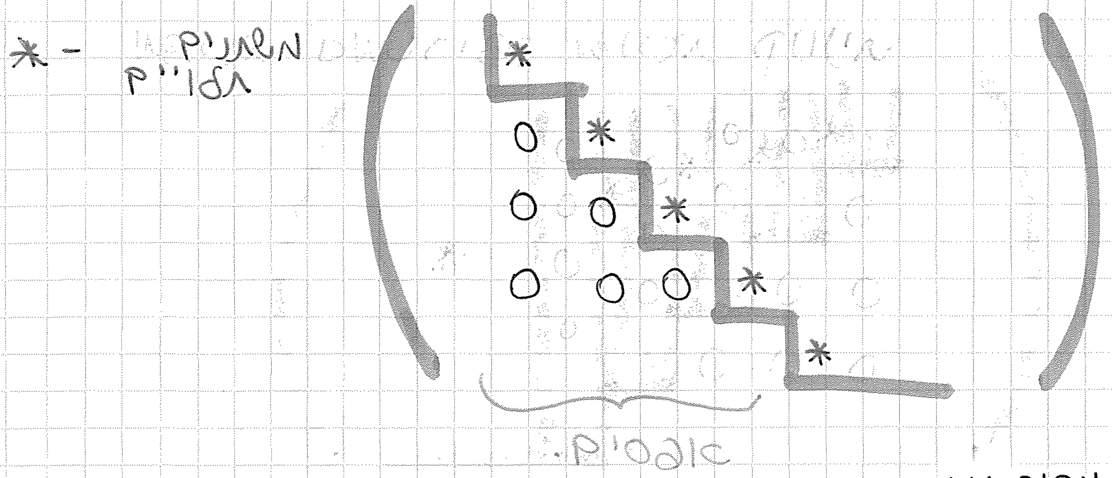
משוואה/שורה (i)   משתנה/עמודה (j)

מטריצה של המע"ל:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

מקדמים   חופשית

1. להביא את המטריצה המקורית לצורה מדורגת.



צורה מדורגת:

מטריצה נקראת מדורגת כאשר היא מקיימת 2 דברים:

1. שורות ה-0 נמצאות מתחת לשורות השונות מ-0.
2. האיבר הפותח של כל שורה שונה מ-0 נמצא מימין לאיבר הפותח של השורה הקודמת.

כדי להגיע לצורה מדורגת מותר לנו להשתמש בפעולות הבאות:

א. החלפת שורות. $R_i \leftrightarrow R_j$

ב. הכפלת שורה במספר שונה מ-0. $R_i \leftarrow a \cdot R_i ,\ a \neq 0$

ג. הוספת שורה: לכל שורה i ניתן להוסיף שורה j כפולה במספר כלשהו. $R_i \leftarrow R_i + aR_j ,\ i \neq j$

פעולות שורה אלמנטריות!

אם במהלך הדירוג מקבלת שורה: $(0\ 0\ 0 \dots 0 \mid \neq 0)$

אז לממ"ל אין פתרון. (המערכת לא עקבית). שורת אי-עקביות

דרגת המטריצה = מספר שורות שונות מאפס בצורה מדורגת. (rank)

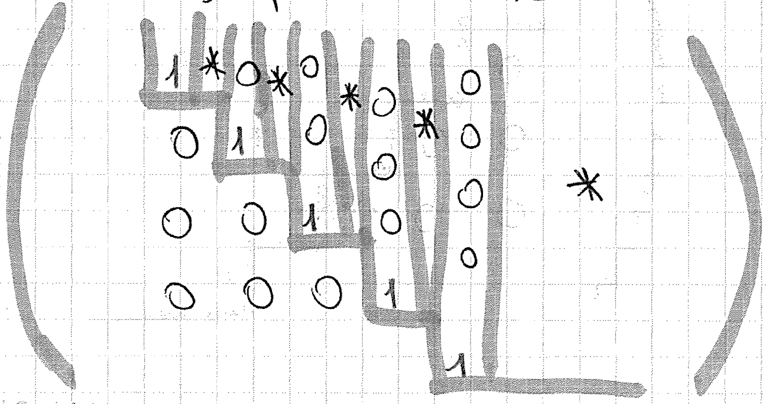
מס' הנעלמים התלויים $= r$

$n-r$ חופשיים.

אם $n=r$ אז יש פתרון יחיד,

אחרת (יתכן) יש אינסוף פתרונות וצריכים להגיע לפתרון הכללי.

2. כדי למצוא פתרון כללי (יחיד) יש להביא מטריצה מדורגת למטריצה מדורגת קנונית:



קנונית:

א. מדורגת.

ב. הפותחים שווים ל-1.

ג. מעל הפותחים יש אפסים.

דוגמה:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 5 \end{cases}$$

משתמשים ב-○ בשביל לאפס את □ (כמו משב)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ \boxed{3} & 2 & -1 & 2 & 4 \\ \boxed{3} & 3 & 3 & -3 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 1.5R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 1.5R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0.5 & 2 & -2.5 & 2.5 \\ 0 & \boxed{1.5} & 6 & -7.5 & 3.5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 3R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} & & & & \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

שורת אי-עקביות

4

דוגמה:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & -4 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & -6 & 9 & 4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -3 & -1 \\ \boxed{2} & 3 & -6 & 9 & 4 \\ \boxed{4} & 5 & -2 & 3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 4R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -10 & 15 & 6 \\ 0 & 1 & -10 & 15 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \boxed{1} & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -10 & 15 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r=2 \Longrightarrow$ 2 קשורים.

$n-r=4-2=2$ חופשיים.

$$\xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_2} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 12 & -18 & -7 \\ 0 & 1 & -10 & 15 & 6 \\ & & \text{אפס} & & \end{array}\right) \end{array}$$

x_1, x_2 – קשורים

x_3, x_4 – חופשיים

$$x_1 = -7 - 12x_3 + 18x_4 \quad \Longleftarrow \quad x_1 + 12x_3 - 18x_4 = -7$$

$$x_2 = 6 + 10x_3 - 15x_4 \quad \Longleftarrow \quad x_2 - 10x_3 + 15x_4 = 6$$

דוגמה:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 2 \\ -x + y + 2z = -8 \\ 3x + 5y + 5z = 3 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ \boxed{2} & 3 & 2 & 2 \\ \boxed{-1} & 1 & 2 & -8 \\ \boxed{3} & 5 & 5 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_3 \leftarrow R_3 + R_1 \\ R_4 \leftarrow R_4 - 3R_1}]{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -7 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 + 3R_2]{R_4 \leftarrow R_4 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r=3,\ n=3$

$\Downarrow$

פתרון יחיד.

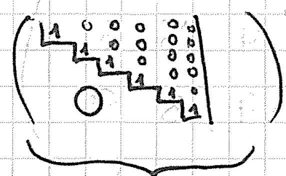
$$\xrightarrow[R_3 \leftarrow \frac{1}{7}R_3]{R_2 \leftarrow (-1)R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \boxed{3} & 1 \\ 0 & 1 & \boxed{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 \leftarrow R_1 - 3R_3]{R_2 \leftarrow R_2 - 4R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array} \longleftarrow \text{קנוני!}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 6 \\ y &= -4 \\ z &= 1 \end{aligned}}$$

לינארית - שיעור 3

ממ"ל $m\times n$ ← $\underset{m\times n}{A}\,|\,\underset{m\times 1}{B}$ $\sim\ldots\sim$



קנונית

$(0\quad 0\quad 0\quad 0\ldots0 \mid \underset{\neq 0}{*})$

שורת אי-עקביות

דרגת המטריצה $r(A|B)$ מספר שורות שונות מ-0 בצורה מדורגת. (מס' משתנים קשורים).

פתרון יחיד: $r=\underset{\text{מס' נעלמים}}{n}$ ← דרגה

פתרון כללי (∞ פתרונות): $n>r$

$n\geq r$ תמיד מתקיים כי הפותחים נמצאים בעמודות שונות.

פעולות שורה אלמנטריות:

א. $R_i \leftrightarrow R_j$

ב. $R_i\leftarrow aR_i$, $a\neq 0$

ג. $R_i\leftarrow R_i+aR_j$

a כלשהו, $i\neq j$

משפט:

פעולות שורה אלמנטריות לא משנות את קבוצת הפתרונות של המע"ל.

הגדרה:

שתי מטריצות A ו- B מסדר $m\times n$ נקראות שקולות (לפי שורות) כאשר B ניתן לקבל מ- A ע"י מספר פעולות שורה אלמנטריות.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\0&0&0\end{pmatrix}$$

האם המטריצות שקולות? לפעמים אפשר לבדוק לראות אם מגיעים לאותו פתרון.

$$\underset{R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2}{\sim} \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\-1&-2&-3\end{pmatrix} \underset{R_3 \leftarrow R_3 + R_1}{\sim} \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$$

הם שקולות!

משפט: שתי מטריצות A ו-B מסדר $m \times n$ שקולות לפי שורות $\Longleftrightarrow$ הצורות הקנוניות שלהן שוות.

משפט: אם מספר הנעלמים במערכת $>$ מספר המשוואות $(m<n)$ אזי למע"ל אין פתרון יחיד.

הוכחה: דרגת המערכת $\le m < n$

$\Leftarrow$ אין מצב ל-"פתרון יחיד". מ.ש.ל.

הגדרה:

מע"ל נקראת הומוגנית (homogeneous) כאשר כל המקדמים החופשיים שלה שווים ל-0: $(A|\vec{0})$

דוגמא:

$$\begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ x+2y+z=0 \end{cases} \qquad \begin{array}{cccc} x & y & z & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&0&0\\0&1&1&0\\1&2&1&0 \end{array}\right) \quad 3\times 3$$

למע"ה (מערכת משוואות הומוגנית) תמיד יש פתרון אחד לפחות: פתרון האפס (טריוויאלי)

מסקנה: אם במע"ה מספר המשוואות $<$ מס' הנעלמים אזי למערכת יש ∞ פתרונות.

מטריצה:

מטריצה מסדר $m \times n$ זה מערך דו-מימדי. (טבלה)

$$A = \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix} \qquad A_1 = (1\ \ 2\ \ 3)$$

נסמן באות גדולה

סוגריים עגולים

שורה ראשונה של המטריצה

2

עמודת המטריצה ה- 1,2,3 .

$$A^{1} = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}, \quad A^{2} = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}, \quad A^{3} = \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$$

$$A_{ij} \qquad\qquad A_{23} = 6$$

מספר השורה — מספר העמודה — שורה 2 — עמודה 3

$$(x_1, \dots, x_n) \qquad \mathbb{R}^{n}$$

סימונים:

קבוצת המטריצות → $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ← כל המטריצות מסדר $m\times n$ ב- $\mathbb{R}^n$

$$A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \right\}$$

סדר מיספור:

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & & & \\ 2 & & & \\ 3 & & & \end{array}$$

פעולות:

A ו- B מטריצות שוות $A=B \iff$

① הסדר שווה

② $A_{ij} = B_{ij}$ לכל $1 \le i \le m$ ולכל $1 \le j \le n$ (m- מספר השורות, n מספר העמודות).

חיבור/חיסור:

$A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ אזי $A \pm B$ תהיה מטריצה מסדר $m\times n$ שרכיביה מוגדרים ע"י הנוסחה:

$$(A \pm B)_{ij} = A_{ij} \pm B_{ij}$$

דוגמא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2.5 & 2\frac{2}{3} \\ 4.25 & 4.8 & 6\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

תכונות:

① קומוטטיביות:

לכל $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ מתקיים

$$A + B = B + A$$

② אסוציאטיבי:

לכל $A,B,C\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ מתקיים

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

③ קיימת מטריצת-אפס $M_{m\times n}(\mathbb{R})\ni O_{m\times n}$

$$O_{3\times 2}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$A+O_{m\times n}=A,\ A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$$

④ לכל מטריצה $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ יש מטריצה (נגדית ל-A) $-A$ (משווה הסבר).

$$(-A)_{ij}=-A_{ij}$$

דוגמא:

$$-\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-2&-3\\-4&-5&-6\end{pmatrix}$$

$$A+(-A)=O_{m\times n}$$

⑤ $$A-B=A+(-B)$$

כפל בסקלר (מספר)

אם A מטריצה מסדר $m\times n$ ו-α מספר כלשהו אזי

$\alpha\cdot A$ המטריצה מסדר $m\times n$

$$(\alpha\cdot A)_{ij}=\alpha\cdot A_{ij}$$

דוגמא:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&1&\frac{3}{2}\\2&\frac{5}{2}&3\end{pmatrix}$$

תכונות:

1. $(\alpha\cdot\beta)\cdot A = \alpha\cdot(\beta\cdot A)$ (חוק הקיבוץ)

2. $1\cdot A = A$ לכל מטריצה A.

חוקי הפילוג: (distributive)

$(\alpha+\beta)\cdot A = \alpha\cdot A + \beta\cdot A$ לכל $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

ולכל מטריצה A.

$\alpha\cdot(A+B) = \alpha\cdot A + \alpha\cdot B$ לכל $\alpha\in\mathbb{R}$

ולכל $A,B\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

כפל מטריצות:

$$\sum$$

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$$

$$a_k = \frac{1}{k}$$

$$a_1+a_2+a_3+\dots+a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\sum_{i=13}^{750} a_i$$

דוגמה:

$$a_i = i \qquad 1,2,3,4$$

$$1+2+3+4+\dots+n = \sum_{i=1}^{n} i$$

$$= \frac{(1+n)n}{2}$$

A, B ניתן להכפיל בסדר $A\cdot B \iff$

מספר העמודות ב-A = מספר השורות ב-B.

$$m\left\{\underbrace{\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}}_{A}\right. \overbrace{}^{n} \qquad n\left\{\underbrace{\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}}_{B}\right. \overbrace{}^{k}$$

$A\,(16\times 2016)$ משבצ $\qquad$ $(2016\times 3)\,B$ משבצ

5

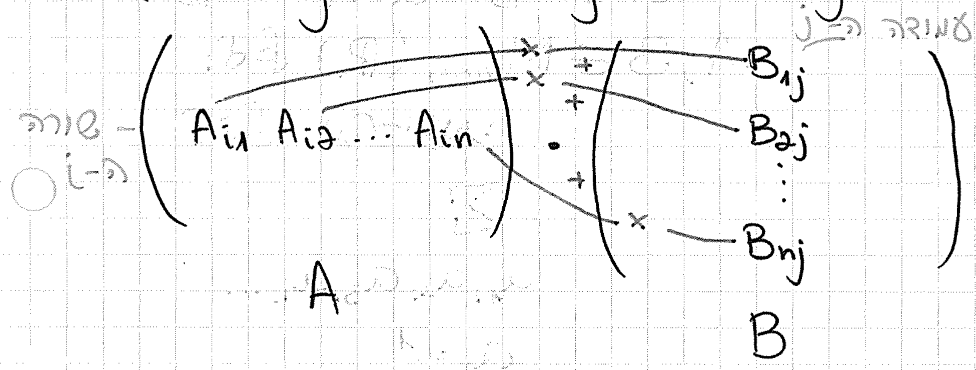
הגדרה:

אם $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ו-$B\in M_{n\times k}(\mathbb{R})$ אזי $A\cdot B$ הינו מטריצה מסדר $m\times k$.

$$((m\times \underline{n})\cdot(\underline{n}\times k)=m\times k)$$

$$\boxed{(A\cdot B)_{ij}=\sum_{s=1}^{n}A_{is}\cdot B_{sj}} =$$

$$=(A\cdot B)_{ij}=A_{i1}\cdot B_{1j}+A_{i2}\cdot B_{2j}+\dots+A_{in}\cdot B_{nj}$$



$$(A\cdot B)_{ij}=A_i\cdot B^j$$

דוגמא:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\qquad \boxed{2}\times\boxed{3}$$

$$B=\begin{pmatrix}-5&7\\11&-13\\-17&19\end{pmatrix}\qquad \boxed{3}\times\boxed{2}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5&7\\11&-13\\-17&19\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\underbrace{-5+22-51}_{11}&\underbrace{7-26+57}_{12}\\\underbrace{-20+55-102}_{21}&\underbrace{28-65+114}_{22}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-34&38\\-67&77\end{pmatrix}\quad 2\times2$$

מס' פעולות כפל: $m\cdot k\cdot n$

$$\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 5x+6y=7 \end{cases}$$

$$x=\frac{1}{2}u+\frac{1}{3}v$$

$$y=\frac{1}{4}u+\frac{1}{5}v$$

אם מציבים
אז נקבל
את הכפל
של שני המטריצות

$$\underset{2\times2}{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}}\cdot\underset{2\times2}{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}}=\begin{pmatrix} \underbrace{2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{4}} & \underbrace{2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{5}} \\ \underbrace{5\cdot\frac{1}{2}+6\cdot\frac{1}{4}} & \underbrace{5\cdot\frac{1}{3}+6\cdot\frac{1}{5}} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1\frac{3}{4} & \frac{19}{15} \\ 4 & \frac{43}{15} \end{pmatrix}$$

תכונות הכפל:

$$(2\times3)\cdot(3\times5)=(2\times5)$$

$$(3\times\boxed{5})\cdot(\boxed{2}\times3)$$

לא מוגדר!

אין חוק החילוף לכפל מטריצות.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & \\ & \end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \\ & \end{pmatrix}$$

7

לינארית - שיעור 4.

כפל מטריצות:

$$A \in M_{\underline{m} \times \underline{n}}(\mathbb{R})$$

$$B \in M_{\underline{n} \times \underline{k}}(\mathbb{R})$$

$$A \cdot B \in M_{\underline{m} \times \underline{k}}(\mathbb{R})$$

$$(A \cdot B)_{ij} := \sum_{s=1}^{n} A_{is} \cdot B_{sj}$$

אם $m=1$ ו-$k=1$.

$$A = (A_{11} \; A_{12} \dots A_{1n}) \cdot B = \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ \vdots \\ B_{n1} \end{pmatrix}$$

$$= A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21} + \dots + A_{1n} \cdot B_{n1}$$

$$(A \cdot B)_{ij} = A_i \cdot B^j$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A_1 \cdot B^1 & A_1 \cdot B^2 \dots & A_1 \cdot B^k \\ A_2 \cdot B^1 & A_2 \cdot B^2 \dots & A_2 \cdot B^k \\ \vdots & & \\ A_m \cdot B^1 & A_m \cdot B^2 \dots & A_m \cdot B^k \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot B)_i = A_i \cdot B$$

$$(A \cdot B)^j = A \cdot B^j$$

דוגמה:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot B \in M_{2\times 4}(\mathbb{R})$$

$$(A\cdot B)_{23} = (4\,5\,6)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$=9$$

$$(A\cdot B)_1 = A_1\cdot B$$

$$= (1\;2\;3)\cdot\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\end{pmatrix}$$

$$= (5\;4\;3\;6)$$

$$(A\cdot B)^3 = A\cdot B^3 = \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix}$$

תכונות:

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

$$a^2-ba+ab-b^2$$

אי אפשר
להחליף את
זה עם
מטריצות.

חוק אסוציאטיבי:

$$\underset{m\times n}{A}\cdot\underset{n\times k}{B}\cdot\underset{k\times l}{C}$$

$$\underbrace{(A\cdot B)}_{m\times k}\cdot\underset{k\times l}{C} = m\times l$$

הם שווים.

$$\underset{m\times n}{A}\cdot\underbrace{(B\cdot C)}_{n\times l} = m\times l$$

2

טענת עזר: נתונה מטריצה (מערך דו-מימדי) X מסדר $N \times K$

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1K} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2K} \\ \vdots & & & \\ X_{N1} & X_{N2} & \cdots & X_{NK} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{N} x_{ij} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{K} x_{ij}$$

אפשר להחליף את ה-$\sum$-ות.

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & + & 2 & + & 3 & 6 \\ + & & + & & + & + \\ 4 & + & 5 & + & 6 & 15 \\ \hline 5 & + & 7 & + & 9 & 21 = 21 \end{array}$$

הוכחה:

כל רכיב X_{ij} של המטריצה מופיע פעם אחת בצד ימין ובצד שמאל.

הוכחה: (של חוק אסוציאטיביות)

צ"ל: $((A \cdot B) \cdot C)_{ij} = (A \cdot (B \cdot C))_{ij}$

לכל $1 \le j \le l$, $1 \le i \le m$.

LHS:
LEFT
AND
SIDE

$$= \sum_{s=1}^{K} (A \cdot B)_{is} \cdot C_{sj}$$

$$= \sum_{s=1}^{K} \left(\sum_{t=1}^{n} A_{it} \cdot B_{ts} \right) \cdot C_{sj}$$

$$\boxed{= \sum_{s=1}^{K} \left(\sum_{t=1}^{n} A_{it} \cdot B_{ts} \cdot C_{sj} \right)}$$

RHS:

RIGHT HAND SIDE

$$= \sum_{p=1}^{n} A_{ip} \cdot (B \cdot C)_{pj}$$

$$= \sum_{p=1}^{n} A_{ip} \cdot \left(\sum_{q=1}^{k} B_{pq} \cdot C_{qj} \right)$$

$$\boxed{= \sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{q=1}^{k} A_{ip} \cdot B_{pq} \cdot C_{qj} \right)}$$

$p \leftrightarrow t \qquad q \leftrightarrow s$

$$= \sum_{t=1}^{n} \left(\sum_{s=1}^{k} A_{it} \cdot B_{ts} \cdot C_{sj} \right)$$

לפי טענת עזר ניתן להחליף את סדר הסיכומים.

לכן $LHS = RHS$. מש"ל.

$$\overset{m\times n}{\underset{2\times 3}{A}} \cdot \overset{n\times k}{\underset{3\times 4}{B}} \cdot \overset{k\times l}{\underset{4\times 5}{C}}$$

$$\underbrace{\overset{2\times 4}{(A \cdot B)}}_{} \cdot \overset{4\times 5}{C}$$

פעולות כפל: $2\cdot4\cdot3 + 2\cdot5\cdot4 = 64$

$$\overset{2\times 3}{A} \cdot \underbrace{\overset{3\times 5}{(B \cdot C)}}_{}$$

פעולות כפל: $2\cdot5\cdot3 + 3\cdot5\cdot4 = 90$

$$((A \cdot B) \cdot C) \cdot D \qquad A \cdot (B \cdot (C \cdot D))$$

$$(A \cdot B) \cdot (C \cdot D)$$

משפט: (חוק אסוציאטיבי מורחב)
ערך הביטוי $(A_1\cdot(A_2))\cdots(A_n)$ לא תלוי בסדר הסוגריים.
(אבל תלוי בסדר הגורמים).

חוק דיסטריבוטיבי (חוק הפילוג):

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$$

טענה: לכל 4 מטריצות:

$$A\in M_{m\times k}(\mathbb{R})$$
$$B,C\in M_{k\times n}(\mathbb{R})$$
$$D\in M_{n\times l}(\mathbb{R})$$

מתקיים:

שמאלי ← להוכיח לשבוע הבא.
$$\overbrace{\underbrace{A}_{m\times k}\cdot(\underbrace{B+C}_{k\times n})}^{m\times n}=\underbrace{A\cdot B}_{m\times n}+\underbrace{A\cdot C}_{m\times n}$$

ימני: ← הוכחה למטה
$$\overbrace{(\underbrace{B+C}_{k\times n})\cdot \underbrace{D}_{n\times l}}^{k\times l}=\underbrace{B\cdot D}_{k\times l}+\underbrace{C\cdot D}_{k\times l}$$

הוכחה:
הסדרים של שני הצדדים שווים.

$$((B+C)\cdot D)_{ij}=\sum_{s=1}^{n}(B+C)_{is}\cdot D_{sj}$$

הגדרת החיבור מטריצות.
$$=\sum_{s=1}^{n}(B_{is}+C_{is})\cdot D_{sj}$$

מספרים

לפי חוק הפילוג לכפל מספרים.
$$=\sum_{s=1}^{n}(B_{is}\cdot D_{sj}+C_{is}\cdot D_{sj})$$

$$=\sum_{s=1}^{n}B_{is}\cdot D_{sj}+\sum_{s=1}^{n}C_{is}\cdot D_{sj}$$

$$= (B\cdot D)_{ij} + (C\cdot D)_{ij}$$

מ.ש.ל $= (B\cdot D + C\cdot D)_{ij}$ הגדרת הסכום של שני מטריצות.

מטריצת היחידה:

מטריצה נקראת מטריצה ריבועית אם מספר השורות שווה למספר העמודות.

מטריצת היחידה:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(כל האינדקסים שווים) $i = j$ אלכסון ראשי.

הגדרה:

מטריצה ריבועית שבה כל איברי האלכסון שווים ל-1 ושאר האיברים שווים ל-0 נקראת מטריצת היחידה.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_1 = (1)$$

דוגמא:

$$\underset{2\times 2}{I_2 A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}\cdot\underset{2\times 3}{\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}}=\underset{2\times 3}{\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}}=A$$

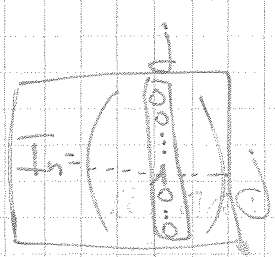
טענה:

לכל $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ מתקיים:

$$\underset{m\times m}{I_m}\cdot\underset{m\times n}{A}=A$$ ← להוכיח בבית ולהגיש בכיתה.

$$\underset{m\times n}{A}\cdot\underset{n\times n}{I_n}=A$$ ← הוכחה למטה

הוכחה:



המספרים של שני הצדדים שווים.

$$(A\cdot I_n)_{ij}=\sum_{s=1}^{n}A_{is}(I_n)_{sj}$$

$$=A_{ij}\cdot(I_n)_{jj}=A_{ij}$$ מ.ש.ל.

שחלוף (מטריצה משוחלפת):

$$\underset{2\times 3}{A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}}\qquad \underset{(A^t)}{A^T}=\underset{3\times 2}{\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}}$$

הגדרה:

אם $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ אז A^T היא מטריצה מסדר $n\times m$ המוגדרת ע"י הנוסחה:

$$(A^T)_{ij}=A_{ji}$$

7

תכונות:

1. לכל $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ מתקיים

$$(A^T)^T=A$$

הוכחה:

קל לראות שהסדרים שווים.

$$((A^T)^T)_{ij}=(A^T)_{ji}=A_{ij}$$ מ.ש.ל.

2. לכל $A,B\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ מתקיים:

$$\underbrace{(A+B)^T}_{n\times m}=\underbrace{A^T}_{n\times m}+\underbrace{B^T}_{n\times m}$$

הוכחה:

קל לראות שהסדרים שווים.

$$((A+B)^T)_{ij}=(A+B)_{ji}=A_{ji}+B_{ji}$$
$$=(A^T)_{ij}+(B^T)_{ij}$$
$$=(A^T+B^T)_{ij}$$ מ.ש.ל.

3. לכל $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ולכל $\alpha\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$(\alpha\cdot A)^T=\alpha\cdot A^T$$

הוכחה:

הסדרים שווים.

$$((\alpha\cdot A)^T)_{ij}=(\alpha\cdot A)_{ji}=\alpha\cdot A_{ji}$$
$$=\alpha\cdot(A^T)_{ij}=(\alpha\cdot A^T)_{ij}$$ מ.ש.ל.

4) לכל $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B\in M_{n\times k}(\mathbb{R})$

$$\overbrace{(\underbrace{A\cdot B}_{m\times k})^T}^{k\times m} = \overbrace{\underbrace{B^T}_{k\times n}\cdot \underbrace{A^T}_{n\times m}}^{k\times m}$$

הוכחה:

הסדרים שווים.

$$((A\cdot B)^T)_{ij} = (A\cdot B)_{ji} = \sum_{s=1}^{n} A_{js}\cdot B_{si}$$

שניהם מספרים אז אפשר להפוך אותם.

$$= \sum_{s=1}^{n} (A^T)_{sj}\cdot (B^T)_{is} = \sum_{s=1}^{n} (B^T)_{is}\cdot (A^T)_{sj}$$

$$= (B^T\cdot A^T)_{ij}$$ מ.ש.ל

מטריצות - שיעור 5

רישום מע"ל בצורה מטריציונית:

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\4&5\\7&8\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{array}\right)$$

A

$$\downarrow$$

$$\begin{cases}x+2y=3\\4x+5y=6\\7x+8y=9\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}1&2\\4&5\\7&8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y\\4x+5y\\7x+8y\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2\\4&5\\7&8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}$$

נוסחה מע"ל:

$$a_{11}\cdot x_1+\dots+a_{1n}\cdot x_n=b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}\cdot x_1+\dots+a_{mn}\cdot x_n=b_m$$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}\dots & a_{1n}\\a_{m1}\dots & a_{mn}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} \qquad \boxed{A\cdot X=B.}$$

.1

האם $(1,1)$ הוא פתרון של המע"ל?

$$A\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\4&5\\7&8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\9\\13\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}$$

$(1,1)$ אין פתרון.

$$A\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\4&5\\7&8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}$$

$(-1,2)$ הוא פתרון פרטי של המערכת.

אם $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ $B\in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ אזי הוקטור $\bar{V}=(\bar{V}_1,\dots,\bar{V}_n)$ יהיה פתרון של המע"ל $AX=B$ $\iff$ $\boxed{A\cdot\bar{V}^T=B}$

$AX=B$ $\qquad ax=b \underset{a\neq 0}{\Rightarrow} x=\frac{b}{a}$

$\Rightarrow x=b\cdot a^{-1}$ $\qquad a^{-1}a=1$

מטריצה הפוכה:

הגדרה:

מטריצה B נקראת הפוכה למטריצה A $\iff$ $\boxed{\underset{n\times m}{A}\cdot\underset{m\times n}{B}=\underset{m\times n}{B}\cdot\underset{n\times m}{A}=\underset{n\times n}{I_n}}$

$m=n$

$m=n \Leftarrow$ A ו- B מטריצות ריבועיות מסדר n.

הגדרה:

מטריצה שיש לה הפוכה נקראת הפיכה.

2

הגדרה:

$A,B\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. B הפוכה ל-A $\iff$ $A\cdot B=B\cdot A=I_n$

דוגמאות:

1. $I_n=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ הפוכה לעצמה.

2. $A=\begin{pmatrix}2&0\\0&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{5}\end{pmatrix}$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2&0\\0&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{5}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0\\0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

3. $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}-2&1\\1.5&-0.5\end{pmatrix}$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&1\\1.5&-0.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}-2&1\\1.5&-0.5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

B הפוכה ל-A. A הפוכה ל-B. A,B הפיכות.

טענה:

לכל מטריצה $A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ יש לכל היותר הפוכה אחת.

הוכחה:

נניח ש- C ו- B שתי הפוכות ל-A שונות זו מזו.

$$A\cdot B=B\cdot A=I_n$$

$$A\cdot C=C\cdot A=I_n$$

נביט במכפלה:

$$B\cdot A\cdot C$$

חוק אסוציאטיבי

$$\underset{B\cdot I_n=B}{B\cdot(A\cdot C)}=\underset{I_n\cdot C=C}{(B\cdot A)\cdot C}$$

3.

$B=C$. סתירה. מ.ש.ל.

מסקנה:
לכל מטריצה $A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ יש הפוכה אחת ויחידה.
נסמן אותה כ- A^{-1}
ז"א:

$$\boxed{A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I_n}$$

A הפוכה ל- A^{-1}:

$$\boxed{(A^{-1})^{-1}=A}$$

פתרון של ממ"ל ע"י מטריצה הפיכה:
נתונה ממ"ל $A\cdot X=B$ כאשר $A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $B\in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ -!
$X\in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$

טענה:
אם A הפיכה, אזי לממ"ל $AX=B$ יש פתרון יחיד לכל עמודה חופשית B.
2 טענות

$$\boxed{X=A^{-1}\cdot B}$$

הוכחת קיום הפתרון:
נקח $X=\underbrace{A^{-1}\cdot B}_{n\times 1}$ ונציב למשוואה $AX=B$.

נקבל $A\cdot(A^{-1}\cdot B)=(A\cdot A^{-1})\cdot B=B \Leftarrow A\cdot(A^{-1}\cdot B)=B \Leftarrow A^{-1}\cdot B$
הוא פתרון של הממ"ל.

הוכחת יחידות:
נניח ש- C_1 ו- C_2 פתרונות של הממ"ל $(C_1,C_2\in M_{n\times 1}(\mathbb{R}))$

$$A\cdot C_1=B \text{ וגם } A\cdot C_2=B \Rightarrow AC_2=AC_1$$

נכפיל ב- A^{-1}:

$$A^{-1}\cdot(A\cdot C_2)=A^{-1}\cdot(A\cdot C_1)$$

$$(A^{-1}\cdot A)\cdot C_2=(A^{-1}\cdot A)\cdot C_1$$

$C_2=C_1$ מ.ש.ל.

<u>דוגמא:</u>

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1\\1.5&-0.5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2016\\2017\end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}2016\\2017\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\1.5&-0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2016\\2017\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2015\\2015.5\end{pmatrix}$$

לכן: $x=-2015$, $y=2015.5$

תכונות של מטריצות הפיכות:

טענה:

נתי' $A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ אזי A הפיכה אמ"מ הצורה הקנונית שלה שווה ל-I_n.

הוכחה:

נניח במערכת: $A\cdot X=0$ למערכת הזאת יש פתרון יחיד: הטריוויאלי.

נדרג את $(A|0)$ ונקבל $(\underset{\text{קנונית}}{\overset{n\times n}{K}}|0)$

פתרון יחיד $\Leftarrow$ כולם מובילים $\Leftarrow$ n מובילים.

$\Leftarrow$ ב-K יש n שורות שונות מאפס.

$$\boxed{K=\begin{bmatrix}1&&0\\&\ddots&\\0&&1\end{bmatrix}=I_n}$$ מ.ש.ל.

פתרון:

1.

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} \neq I_2$$

קנונית

2.

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} \underset{\substack{R_2 \leftarrow R_2-4R_1\\ R_3 \leftarrow R_3-7R_1}}{\sim} \begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&-6&-12\end{pmatrix} \underset{R_3 \leftarrow R_3-2R_2}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\ \cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}\end{pmatrix} \neq I_3$$

לא הפיכה.

3.

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix} \underset{R_2 \leftarrow R_2-R_1}{\sim} \begin{pmatrix}1&1\\0&-2\end{pmatrix} \underset{R_2 \leftarrow \frac{R_2}{-2}}{\sim} \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} \underset{R_1 \leftarrow R_1-R_2}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = I_2$$

טענה:

אם $A,B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ הפיכות אזי גם $A\cdot B$ הפיכה !-

$$\boxed{(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}}$$

הוכחה:

A ו- B הפיכות, לכן קיימות A^{-1} ו- B^{-1} כך ש-:

$$A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I_n \quad \text{-ו} \quad B\cdot B^{-1} = B^{-1}\cdot B = I_n$$

נוכיח ש- $B^{-1}\cdot A^{-1}$ הפוכה ל- $A\cdot B$.

חוק הקיבוץ

$$(A\cdot B)\cdot(B^{-1}\cdot A^{-1}) = (A\cdot(B\cdot B^{-1}))\cdot A^{-1}$$

$$= (A\cdot I_n)\cdot A^{-1} = A\cdot A^{-1} = I_n$$

.6

אותו הדבר ← $(B^{-1}\cdot A^{-1})\cdot(A\cdot B) = \dots = I_n$ מ.ש.ל.

טענה:

אם $A_1,A_2,\dots,A_k$ הפיכות מסדר n אזי $A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_k$ הפיכה ו- $\boxed{(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_k)^{-1} = A_k^{-1}\cdot\ldots\cdot A_2^{-1}\cdot A_1^{-1}}$

הוכחה:

$$(A_1\cdot\ldots\cdot A_k)\cdot(A_1^{-1}\cdot A_2^{-1}\cdot\ldots\cdot A_k^{-1}) =$$

$$A_1\cdot\ldots\cdot A_k\cdot A_k^{-1}\cdot\ldots\cdot A_1^{-1}$$

$$A_k\cdot A_k^{-1} = I_n = A_{k-1}\cdot A_{k-1}^{-1}$$

$$A_1\cdot\ldots\cdot A_{k-1}\cdot A_{k-1}^{-1}\cdot\ldots\cdot A_1^{-1} = \dots = I_n$$

אינדוקציה לפי k:

<u>בדיקה:</u> $k=1$ צ"ל $A_1^{-1}=A_1^{-1}$ טריוויאלי.

<u>צעד האינדוקציה:</u>

<u>נניח שהטענה נכונה עבור k:</u>

לכל k מטריצות הפיכות $A_1,\dots,A_k$ מכפלתן $A_1\cdot\ldots\cdot A_k$ הפיכה

ו- $(A_1\cdot\ldots\cdot A_k)^{-1}=A_k^{-1}\cdot\ldots\cdot A_1^{-1}$

נקח $k+1$ מטריצות הפיכות $A_1,\dots,A_k,A_{k+1}$ מסדר n.

לפי הנחת האינדוקציה $A_1\cdot\ldots\cdot A_k$ הפיכה ו- $(A_1\cdot\ldots\cdot A_k)^{-1}=A_k^{-1}\cdot\ldots\cdot A_1^{-1}$.

לפי הטענה הקודמת המטריצה $(A_1\cdot\ldots\cdot A_k)\cdot A_{k+1}$ הפיכה

וההפוכה שלה שווה ל-:

$$A_{k+1}^{-1}\cdot(A_1\cdot\ldots\cdot A_k)^{-1}$$

לפי הנחת האינדוקציה: $(A_1\cdot\ldots\cdot A_k)^{-1}=A_k^{-1}\cdot\ldots\cdot A_1^{-1}$

לכן $A_{k+1}^{-1}\cdot(A_1\cdot\ldots\cdot A_k)^{-1}=A_{k+1}^{-1}\cdot A_k^{-1}\cdot\ldots\cdot A_1^{-1}$ מ.ש.ל.

חזקות המטריצה:

נקח $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ כלשהי. נגדיר:

$$A^1 := A \qquad A^2 := A\cdot A \qquad A^3 := A^2\cdot A \qquad \boxed{A^k = A^{k-1}\cdot A}$$

A בחזקת אפס.

$$A^0 = I_n$$

אם A הפיכה נגדיר

$$\boxed{A^{-n} = (A^{-1})^n} \quad n \text{ טבעי}$$

למשל

$$A^{-3} = (A^{-1})^3$$

מסקנה:

אם A הפיכה, אז $\boxed{(A^{-1})^k = (A^k)^{-1}}$ לכל k טבעי.

תכונות של חזקות מטריצות:

A^k כאשר $k \in \mathbb{Z}$.

1. $A^k \cdot A^m = A^{k+m}$

א: $k>0,\ m>0$

$$A^k\cdot A^m = \underbrace{(A\cdot\ldots\cdot A)}_{k}\cdot\underbrace{(A\cdot\ldots\cdot A)}_{m} = A^{k+m}$$

ב: $k>0,\ m<0$

$$A^k\cdot A^m = \underbrace{A\cdot\ldots\cdot A}_{k}\cdot\underbrace{A^{-1}\cdot\ldots\cdot A^{-1}}_{|m|}$$

$$= \begin{cases} A^{k-|m|}, & k>|m| \ = A^{k+m} \\ I_n, & k=|m| \ = A^0 = A^{k+m} \quad \boxed{-|m|=m} \\ (A^{-1})^{|m|-k}, & k<|m| = A^{-(|m|-k)} = A^{k-|m|} = A^{k+m} \end{cases}$$

8

צ"ל

$$\underset{m\times m}{I_m} \cdot \underset{m\times n}{A} = A$$

הוכחה:

הסדרים של שני הצדדים שווים.

$$(I_m \cdot A)_{ij} = \sum_{s=1}^{n} (I_m)_{is} \cdot A_{sj}$$

$$\boxed{= (I_m)_{ii} \cdot A_{ij} = A_{ij} \quad \text{מ.ש.ל.}}$$

ב.

לינארית - שיעור 6.

$A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ הפיכה $\iff$ קיימת $A^{-1} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

כך ש-: $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I_n$

טענה: אם A הפיכה אז הצורה הקנונית שלה שווה ל-I_n.

משפט: אם $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ניתן להביא ל- I_n ע"י פעולות שורה אלמנטריות, אזי A הפיכה.

פעולות אלמנטריות:

א. $R_i \leftrightarrow R_j$

ב. $R_i \leftarrow aR_i \qquad a \neq 0$

ג. $R_i \leftarrow R_i + aR_j \qquad i \neq j$

מטריצה אלמנטרית:

הגדרה: מטריצה שמתקבלת ממטריצת היחידה ע"י פעולה אלמנטרית אחת נקראת מטריצה אלמנטרית.

מטריצה אלמנטריות:

א.
$$T_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{R_3 \leftrightarrow R_1}{\sim} I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ב.
$$E_2(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{R_2 \leftarrow 3R_2}{\sim} I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ג.
$$E_3^2(5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{R_2 \leftarrow R_2 + 5R_3}{\sim} I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_j^i(a)$$

$$R_i \leftarrow R_i + aR_j$$

1.

ביצוע פעולה אלמנטרית = כפל במטריצה אלמנטרית משמאל.

$$\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xleftarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

משפט: תהי $A \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$ מטריצה כלשהי. אזי לכל פעולה אלמנטרית P מתקיים:

$$B = E \cdot A$$

כאשר B היא מטריצה שמתקבלת מ-A ע"י ביצוע פעולה P ו- E היא מטריצה אלמנטרית של הפעולה P.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} A \xrightarrow{P} B \\ I_n \xrightarrow{P} E \end{array}\right\} \Rightarrow B = E \cdot A}$$

הוכחה: $(n=3)$

א. $P = R_1 \leftrightarrow R_2$

$$B = \begin{pmatrix} A_{21} & A_{22} \cdots & A_{2k} \\ A_{11} & A_{12} \cdots & A_{1k} \\ A_{31} & A_{32} \cdots & A_{3k} \end{pmatrix} \xleftarrow{P} A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \cdots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} \cdots & A_{2k} \\ A_{31} & A_{32} \cdots & A_{3k} \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xleftarrow{P} I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A_{21} & A_{22} \cdots & A_{2k} \\ A_{11} & A_{12} \cdots & A_{1k} \\ A_{31} & A_{32} \cdots & A_{3k} \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \cdots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} \cdots & A_{2k} \\ A_{31} & A_{32} \cdots & A_{3k} \end{pmatrix}}_{A}$$

ב.

$P = R_3 \leftarrow aR_3,\ a \neq 0$ d)

$$B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ aA_{31} & aA_{32} & \cdots & aA_{3k} \end{pmatrix} \xleftarrow{P} A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ A_{31} & A_{32} & \cdots & A_{3k} \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \xleftarrow{P} I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{B}{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ aA_{31} & aA_{32} & \cdots & aA_{3k} \end{pmatrix}} \underset{=}{=} \underset{E}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}} \cdot \underset{A}{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ A_{31} & A_{32} & \cdots & A_{3k} \end{pmatrix}}$$

$P = R_1 \leftarrow R_1 + 5R_3$ e)

$$B = \begin{pmatrix} A_{11}+5A_{31} & A_{12}+5A_{32} & \cdots & A_{1k}+5A_{3k} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ A_{31} & A_{32} & \cdots & A_{3k} \end{pmatrix} \longleftarrow A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ A_{31} & A_{32} & \cdots & A_{3k} \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longleftarrow I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{B}{\begin{pmatrix} A_{11}+5A_{31} & A_{12}+5A_{32} & \cdots & A_{1k}+5A_{3k} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ A_{31} & A_{32} & \cdots & A_{3k} \end{pmatrix}} \underset{=}{=} \underset{E}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{A}{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ A_{31} & A_{32} & \cdots & A_{3k} \end{pmatrix}}$$

טענה: כל מטריצה אלמנטרית הפיכה, וההפוכה שלה היא מטריצה אלמנטרית של הפעולה ההפוכה.

פעולות הפוכות:

א. $E_{ij}^{-1}=E_{ij}$ (החלפת שורות $R_i \leftrightarrow R_j$)

ב. $E_i(a)^{-1}=E_i(a^{-1})$

ג. $\left(E_j^i(a)\right)^{-1}=E_j^i(-a)$

דוגמא ל-א:

$$E_{13}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$E_{13}\cdot E_{13}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

דוגמא ל-ב:

$$E_2(3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$E_2\left(\tfrac{1}{3}\right)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

הוכחה:

א. $$I_n \xleftarrow{R_i\leftrightarrow R_j} E_{ij} \xleftarrow{R_i\leftrightarrow R_j} I_n$$

$E=E_{ij}$ לפי המשפט $\Leftarrow$ $I_n=E_{ij}\cdot E_{ij}$ $\Leftarrow$ E_{ij} הפוכה לעצמה:

$$E_{ij}^{-1}=E_{ij}$$

ב. $$I_n \xleftarrow{R_i\leftarrow a^{-1}R_i} E_i(a) \xleftarrow[a\neq 0]{R_i\leftarrow aR_i} I_n$$

$$E=E_i(a^{-1})$$

לפי המשפט: $B=E\cdot A$

$$I_n=E_i(a^{-1})\cdot E_i(a)$$

נציב a^{-1} במקום a:

$$I_n=E_i((a^{-1})^{-1})\cdot E_i(a^{-1})$$

$$I_n=E_i(a)\cdot E_i(a^{-1})$$

קבלנו ש-$E_i(a^{-1})$ הפוכה ל-$E_i(a)$, ז"א $E_i(a^{-1})=E_i(a)$

ג. $$I_n \xleftarrow{R_i\leftarrow R_i-aR_j} E^i_j(a) \xleftarrow{R_i\leftarrow R_i+aR_j} I_n \quad ,\ i\neq j$$

$E=E^i_j(-a)$ לפי המשפט: $B=E\cdot A \Rightarrow I_n=E^i_j(-a)\cdot E^i_j(a)$

נציב $-a$ במקום a: $I_n=E^i_j(a)\cdot E^i_j(-a)$

מ.ש.ל.

הוכחת המשפט:

$$A\in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \xrightarrow{P_1} A_1 \xrightarrow{P_2} A_2 \xrightarrow{P_3} A_3 \to \cdots \to \xrightarrow{P_m} A_m = I_n$$

נסמן כ-E_i מטריצה אלמנטרית של הפעולה P_i

לפי המשפט $A_1=E_1\cdot A$

$A_2=E_2\cdot A_1 \Rightarrow A_2=E_2\cdot E_1\cdot A$

$A_3=E_3\cdot A_2 \Rightarrow A_3=E_3\cdot E_2\cdot E_1\cdot A$ ...

$$I_n = A_m = \underbrace{E_m \cdot E_{m-1} \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1}_{=:B} \cdot A \Leftarrow A_m = E_m \cdot A_{m-1}$$

$$I_n = B \cdot A$$

נוכיח ש- $A \cdot B = I_n$

כל אחת מ- E_i הפיכה, לכן $B = E_m \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1$

הפיכה (תזכורת: מכפלת ההפיכות גמ״כ הפיכה)

⇐ קיימת $B^{-1} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ כך ש- $B^{-1} \cdot B = B \cdot B^{-1} = I_n$

$$A = B^{-1} \Leftarrow B^{-1}(B \cdot A) = B^{-1} \Leftarrow B \cdot A = I_n$$

⇐ $A \cdot B = B^{-1} \cdot B = I_n$. הוכחנו ש- B הפוכה ל- A.

$$\underbrace{E_m \cdots E_1}_{A^{-1}} \leftarrow \cdots \leftarrow E_3 E_2 E_1 \xleftarrow{P_3} E_2 E_1 \xleftarrow{P_2} E_1 \xleftarrow{P_1} I_n$$

דוגמא:

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&-2\end{pmatrix} \xleftarrow{R_1 \leftarrow R_1+R_2} \begin{pmatrix}1&2\\0&-2\end{pmatrix} \xleftarrow{R_2 \leftarrow R_2-3R_1} \begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftarrow \frac{R_2}{-2}} \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2&1\\-3&1\end{pmatrix} \xleftarrow{R_1 \leftarrow R_1+R_2} \begin{pmatrix}1&0\\-3&1\end{pmatrix} \xleftarrow{R_2 \leftarrow R_2-3R_1} \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}-2&1\\1.5&-0.5\end{pmatrix} \xleftarrow{R_2 \leftarrow \frac{R_2}{-2}}$$

בדיקה:

$$\begin{pmatrix}-2&1\\1.5&-0.5\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-2&1\\1.5&-0.5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

אלגוריתם לחישוב A^{-1}:

$$(A \mid I_n) \text{ מדרג } (I_n \mid A^{-1})$$

אם בצד שמאל לא מתקבלת I_n אז A אינה הפיכה.

דוגמא:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\quad\quad\quad}^{A}} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\quad\quad\quad}^{I_3}} \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 7R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -11 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 \leftarrow R_1 - 3R_3]{R_2 \leftarrow R_2 + 6R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -2 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & -11 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftarrow \frac{1}{-3} R_2}$$

משולשת עליונה

משולשת תחתונה

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -2 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

בדיקה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לינארית - שיעור 8

מטריצה הפיכה

משפט: $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ הפיכה $\Longleftrightarrow$ הצורה המדורגת הקנונית שלה שווה ל-I_n $\Longleftrightarrow$ אפשר להביא אותה ל-I_n ע"י פעולות שורה אלמנטריות.

$$X=A^{-1}\cdot B \underset{\substack{A\\ \text{הפיכה}}}{\Longleftarrow} AX=B$$

תכונות של ההפיכה:

אם A הפיכה אז למשל $AX=B$ יש פתרון יחיד לכל B אפשרי.

טענה: נניח $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ כלשהי. אם למערכת $AX=0$ יש פתרון יחיד אזי A הפיכה.

הוכחה:

A ריבועית $\Leftarrow$ פתרון יחיד יכול להיות רק כאשר בצורה קנונית של A אין שורת אפס.

הקנונית $I_n=\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}$

אז A ניתן להביאו ל-I_n ע"י פעולות שורה אלמנטריות.

לפי המשפט שהוכחתי A הפיכה. מ.ש.ל.

טענה:

נניח $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ כלשהי. אם קיים $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ כך ש- $B\cdot A=I_n$ אזי $A\cdot B=I_n$ ולכן $B=A^{-1}$.

הוכחה:

מערכת המתאימה.

נבדוק ממ"ה $AX=0$ ונכפיל ב-B משמאל:

$$\Leftarrow B(AX)=B\cdot 0$$

$\Leftarrow$ $X=0$ $\Leftarrow$ יש פתרון $\underset{\substack{\text{הטענה}\\ \text{הקודמת}}}{\Leftarrow}$ A הפיכה.

$\Leftarrow$ קיימת $A^{-1} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ כך ש-:

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I_n$$

.1

לפי ההנחה $B\cdot A\cdot A^{-1} = I_n\cdot A^{-1}$ ⇐ $B=A^{-1}$

⇐ $A\cdot B = A\cdot A^{-1} = I_n$. מ.ש.ל.

<u>דוגמא:</u>

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\underset{2\times4\ \ 4\times2}{A\cdot A^T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A^T\cdot A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ & & & \end{pmatrix}$ X לא עובד.

טענה: תהי $A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ כלשהי. אם לכל עמודה $B=\begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix}$ למערכת $AX=B$ יש פתרון אחד לפחות. אזי A הפיכה.

A הפיכה $\Leftarrow$ למערכת $AX=B$ יש פתרון יחיד לכל B

A הפיכה $\Longrightarrow$ למערכת $AX=0$ יש פתרון יחיד

A הפיכה $\Longrightarrow$ למערכת $AX=B$ יש פתרון לכל B

הוכחה:

ניקח $B^1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ⇐ למערכת $AX=B^1$ יש פתרון.

נסמן אחד מהפתרונות כ- C^1.

$A\cdot C^1 = B^1$

ניקח $B^2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ⇐ קיים C^2 כך ש- $AC^2=B^2$.

נמשיך. נקבל C^k כך ש- $A\cdot C^k=B^k$ כאשר:

$$B^k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k$$

נקבל n עמודות C^k שמקיימות $AC^k=B^k$

נגדיר $C=(C^1\ C^2 \dots C^n)$

נוכיח ש- : $A\cdot C = I_n$

.2

$$(A\cdot C)^i = A\cdot C^i = B^i = (I_n)^i$$

לכל $1 \le i \le n$ לכן $AC = I_n \Leftarrow C\cdot A = I_n$!-
הטענה הקודמת

$C = A^{-1}$ מ.ש.ל.

__דוגמה:__

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

נבדוק האם $A\cdot X = B$ פתירה לכל B.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & b_1 \\ 3 & 4 & b_2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & b_1 \\ 0 & -2 & b_2 - 3b_1 \end{array}\right) \sim$$

$$\boxed{\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 1 & \frac{b_2 - 3b_1}{-2} \end{array}\right)}$$

$$C^1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1.5 \end{pmatrix} \Leftarrow B^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Leftarrow B^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} = (C^1 \ C^2)$$

אלגברה של מטריצות ריבועיות:

$$M_n(\mathbb{R}) = M_{n\times n}(\mathbb{R})$$

$A, B \in M_n(\mathbb{R}) \Rightarrow A + B \in M_n(\mathbb{R})$ (1)

סגירות ביחס לחיבור מטריצות

$\alpha \in \mathbb{R},\ A \in M_n \Rightarrow \alpha\cdot A \in M_n(\mathbb{R})$ (2)

$A, B \in M_n(\mathbb{R}) \Rightarrow A\cdot B \in M_n(\mathbb{R})$ (3)

$A \in M_n(\mathbb{R}) \Rightarrow A^T \in M_n(\mathbb{R})$ (4)

חזקות של מטריצות:

$A \in M_n(\mathbb{R})$

$A^1 := A$

$A^2 := A\cdot A$

$A^k := A^{k-1}\cdot A$

k מספר טבעי.

.3

$$A^{0}:=I_n$$

A^{-1} ההפוכה ל- A (אם קיימת)

$A^{-2}=(A^{-1})^2$

$\vdots$

$A^{-k}=(A^{-1})^k$ בתנאי ש- A הפיכה.

טענה:

$A^k\cdot A^l=A^{k+l}$ (כאשר כל ההזקות מוגדרות.)

$$(A^k)^l=A^{k\cdot l}$$

$$A^k\cdot A^l=\underbrace{(A\cdot\ldots\cdot A)}_{k}\underbrace{(A\cdot\ldots\cdot A)}_{l}$$

$$\text{חוק הקיבוץ}=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{k+l}=A^{k+l}$$

פולינום של מטריצה A:

$$a_k\cdot A^k+a_{k-1}A^{k-1}+\ldots+a_1\cdot A^1+a_0\cdot A^0$$

A^{-1} תמיד פולינום של A ממעלה $\leq n$.

דוגמא:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}\quad A^2=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}^2$$

$$=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}=4\cdot I_n\qquad A^2=4I_n=\frac{1}{4}AA=I_n$$

$\frac{1}{4}A$ ההפוכה של A.

.4

$$A^{-1} = \frac{1}{4}A$$

Hadamard:

$$\underset{\pm 1}{A} \cdot A = nI_n$$

$$n = 4 \cdot m^2$$

חייב להתחלק ב-4 וחייב להיות ריבוע מושלם.

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

דוגמא:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מתחלפות: $AB = BA$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$(A-B)(A+B) \neq A^2 - B^2$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ax+by & az+bw \\ cx+dy & cz+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} ax+by = 1 \\ az+bw = 0 \\ cx+dy = 0 \\ cz+dw = 1 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} d\times \\ b\times \end{matrix} \begin{cases} ax+by = 1 & \times c \\ cx+dy = 0 & \times a \end{cases}$$

$$dax - bcx = d$$

$$\Downarrow$$

$$(da-bc) \cdot x = d$$

$$\Downarrow \; da - bc \neq 0$$

$$x = \frac{d}{da-bc}$$

$$bcy - day = c$$

$$\Downarrow$$

$$(bc-ad) \cdot y = c$$

$$\Downarrow$$

$$y = \frac{c}{bc-ad} \Rightarrow y = \frac{-c}{ad-bc}$$

$$\begin{array}{l} dx \\ bx \end{array}\begin{cases} az+bw=0 \\ cz+dw=1 \end{cases}$$

$$daz-bcz=-b$$

$$\Downarrow$$

$$(da-bc)z=-b$$

$$\Downarrow \; da-bc\neq 0$$

$$z=\frac{-b}{da-bc}$$

$$bcw-adw=-a$$

$$bcw-adw=-a$$

$$\Downarrow$$

$$(bc-ad)w=-a$$

$$\Downarrow \; bc-ad\neq 0$$

$$w=\frac{a}{ad-bc}$$

באלכסונים של

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

אם $ad-bc\neq 0$ אז

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{d}{da-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{ad-bc}\cdot\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\det(A)=|A|$$

דוגמא:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 21 & 31 \end{pmatrix} \qquad \det(A)=1\cdot 31-21\cdot 11=-200\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-200}\cdot\begin{pmatrix} 31 & -11 \\ -21 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -0.155 & 0.055 \\ 0.105 & -0.005 \end{pmatrix}$$

6

קיבלנו ש-:

מתנאי ש-

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$ad-bc\neq 0$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=(ad-bc)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

טענה:

אם (הדטרמיננטה שווה ל-0) $ad-bc=0$ אז

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ לא הפיכה.

הוכחה:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=(ad-bc)\cdot I_2$$

$$\Downarrow$$

$$A\cdot A^* = O$$

נניח, בדרך שלילה ש- A הפיכה $\Leftarrow$ קיימת A^{-1}.

$$A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=I_2$$

$$A^{-1}\cdot(A\cdot A^*)=O$$

$$A^*=O$$

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad a=b=d=c=0$$

$A=O \Rightarrow$ לא הפיכה.

סתירה.

משפט:

מטריצה $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ הפיכה $\Longleftrightarrow$ $|A|=ad-bc$

שונה מאפס ובמקרה הזה

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

דטרמיננטה של מטריצה ריבועית

מטריצה מינורית של מטריצה.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} \qquad M_{32}(A)=\begin{pmatrix}1&3\\4&6\end{pmatrix} \Rightarrow |M_{32}(A)|=-6$$

מטריצה שמתקבלת ממטריצה A ע"י מחיקה של שורה ה-i
ועמודה ה-j נקראת מטריצה מינורית של הרכיב (ij)

$M_{ij}(A)$

יש n^2 מטריצות מינוריות $|M_{ij}(A)|$ מינור ה-ij

$$M_{11}=\begin{pmatrix}5&6\\8&9\end{pmatrix} \Rightarrow |M_{11}(A)|=5\cdot 9-8\cdot 6=-3$$

$$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \qquad M_{11}(A)=(d) \Rightarrow |M_{11}(A)|=d$$

$$M_{12}(A)=(c) \Rightarrow |M_{12}(A)|=c$$

הגדרה של דטרמיננטה של $A\in M_n(\mathbb{R})$

$$\boxed{|A|=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}A_{1j}\cdot|M_{1j}(A)|}$$

$$=A_{11}|M_{11}(A)|-A_{12}|M_{12}(A)|+A_{13}\cdot|M_{13}(A)|-\dots(-1)^{1+n}A_{1n}|M_{1n}(A)|$$

דוגמא:

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}5&6\\8&9\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}4&6\\7&9\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}4&5\\7&8\end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot(-3)-2\cdot(-6)+3\cdot(-3)=0$$

דוגמא:

$$\boxed{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c}$$

.9

לינארית - שיעור 9

דטרמיננטה:

$$A \in M_n(\mathbb{R})$$

$$\det(A) = |A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \cdot A_{1j} \cdot |M_{1j}(\mathbb{R})|$$

דטרמיננטה של מטריצה 3x3:

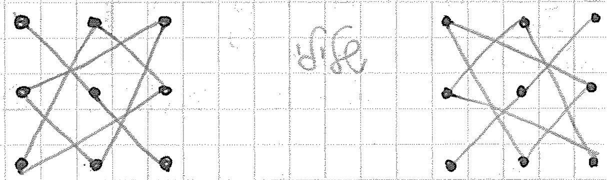
$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$|A| = A_{11} \cdot \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} - A_{12} \cdot \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} + A_{13} \cdot \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix}$$

$$= A_{11} \cdot (A_{22} \cdot A_{33} - A_{23} \cdot A_{32}) - A_{12} \cdot (A_{21} \cdot A_{33} - A_{23} \cdot A_{31}) + A_{13} \cdot (A_{21} \cdot A_{32} - A_{22} \cdot A_{31}) =$$

$$= A_{11} \cdot A_{22} \cdot A_{33} + A_{12} \cdot A_{23} \cdot A_{31} + A_{13} \cdot A_{21} \cdot A_{32} - (A_{11} \cdot A_{23} \cdot A_{32} + A_{12} \cdot A_{21} \cdot A_{33} + A_{13} \cdot A_{22} \cdot A_{31})$$

חיובי: שלילי:



$$A = \left(\begin{matrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{matrix}\right) \begin{matrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \\ A_{13} & A_{23} \end{matrix}$$

חיובי
שלילי

עושים כפול לכל הערכים
על הקוים עם הערכים
על אותו קו. ואז מחברים
את כל הערכים.
ואז עושים את החלק
החיובי פחות החלק השלילי.

דוגמא:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{matrix}$$

$12+36+32=80$

$48+18+16=82$

$82-80=2$

$\pm A_{1i_1}\cdot A_{2i_2}\cdot A_{3i_3}$ $\qquad n!$

$\{i_1,i_2,i_3\}=\{1,2,3\}$

i_1,i_2,i_3

תמורה של $1,2,3$

פעולות כפל: $n!\cdot(n-1)$

תכונות של דטרמיננטה:

1. פיתוח של דטרמיננטה לפי שורות ועמודות.

פיתוח של $\det(A)$ לפי שורה ה-k:

$$\boxed{|A|=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}\cdot A_{kj}\,|M_{kj}(A)|}$$

פיתוח לפי עמודה ה-k:

$$\boxed{|A|=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+k}\cdot A_{ik}\,|M_{ik}(A)|}$$

דוגמא:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ {}_{+}A_{31} & {}_{-}A_{32} & {}_{+}A_{33} \end{vmatrix} = A_{31}\cdot(A_{12}\cdot A_{23}-A_{13}\cdot A_{22})-A_{32}\cdot(A_{11}\cdot A_{23}-A_{13}A_{21})+$$

$$+A_{33}\cdot(A_{11}\cdot A_{22}-A_{12}\cdot A_{21})$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

.2

בפועל:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} + & - & + & - \end{array} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \end{array} = -0\cdot|M_{14}(A)| + 0\cdot|M_{24}(A)| - 1\cdot\begin{vmatrix} 2&1&0\\1&2&1\\0&0&1 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 2&1&0\\1&2&1\\0&1&2 \end{vmatrix}$$

$$\left|\begin{matrix} 2&1&0\\1&2&1\\0&0&1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2&1\\1&2\\0&0 \end{matrix} \qquad 0+0+1=1 \qquad 4+0+0=4 \qquad 4-1=3$$

$$\left|\begin{matrix} 2&1&0\\1&2&1\\0&1&2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2&1\\1&2\\0&1 \end{matrix} \qquad 0+2+2=4 \qquad 8+0+0=8 \qquad 8-4=4$$

$$= -1\cdot(3)+2\cdot(4) = -3+8 = \underline{\underline{5}}$$

דטרמיננטות של מטריצות מיוחדות:

מטריצה משולשת

תחתונה

עליונה

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ 2 & 3 & \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 4 & 5 \\ 0 & & 6 \end{pmatrix}$$

כל הרכיבים מעל האלכסון שווים ל-0

כל הרכיבים מתחת לאלכסון הראשי אפסים.

אלכסונית

$$\begin{pmatrix} A_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{nn} \end{pmatrix}$$

טענה:

.3 דטרמיננטה של מטריצה משולשת שווה למכפלת איברי האלכסון.

טענה:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} = A_{11} \cdot A_{22} \cdot \ldots \cdot A_{nn}.$$

הוכחה: אינדוקציה לפי n.

בדיקה: $n=1 \Leftarrow A=(A_{11})$

$|A|=A_{11}$ OK.

הנחת האינדוקציה: הנוסחה נכונה עבור כל מטריצה משולשת עליונה מסדר $n-1$.

נפתח את הדטרמיננטה לפי השורה האחרונה:

$$|A| = A_{nn} \begin{vmatrix} A_{11} & & * \\ & A_{12} \ddots & \\ O & & A_{nn} \end{vmatrix} \overset{\text{הנחת האינדוקציה}}{=}$$

$= A_{nn} \cdot A_{11} \cdot A_{22} \cdot \ldots \cdot A_{n-1n-1}$ מ.ש.ל.

טענה: לכל $A \in M_n(\mathbb{R})$ מתקיים $|A|=|A^T|$

הוכחה:

אינדוקציה לפי n:

בדיקה: $n=1 \Leftarrow A=(A_{11}) \Leftarrow A^T=(A_{11})$

$|A|=A_{11}$ וגם $|A^T|=A_{11}$

$n=2$

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftarrow |A|=ad-bc$

$A^T=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Leftarrow |A^T|=ad-bc$ OK.

הנחת האינדוקציה $|A^T|=|A|$
לכל A מסדר n-1

צ"ל: $|A|=|A^T|$ לכל A מסדר n.

$(n\geq 3)$

נפתח את $|A^T|$ (A מסדר n) לפי שורה ראשונה.

$$|A^T|=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}(A^T)_{1j}\cdot|M_{1j}(A^T)|$$

$$(A^T)_{1j}=A_{j1}\ ,$$

$$M_{1j}(A^T)=M_{j1}(A)^T$$

נציב בפיתוח לפי שורה ראשונה.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\rightarrow M_{23}(A)=\begin{pmatrix}1&2\\7&8\end{pmatrix}$$

$$A^T=\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}\rightarrow M_{32}(A^T)=\begin{pmatrix}1&7\\2&8\end{pmatrix}$$

$$|A|=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}A_{j1}\cdot\underbrace{|M_{j1}(A)^T|}_{\text{מסדר } n-1}$$

לפי הנחת האינדוקציה:

$$|M_{j1}(A)^T|=|M_{j1}(A)|$$

$$|A^T|=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}A_{j1}\cdot|M_{j1}(A)|$$

$$i\leftarrow j$$

$$|A^T|=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}A_{i1}\cdot|M_{i1}(A)|$$

פיתוח של $|A|$ לפי עמודה ראשונה.

$\Leftarrow$ $|A^T|=|A|$ מ.ש.ל.

מטריצה מצורפת ל- A: ($adj(A) = A^*$)

הגדרה:

אם $A \in M_n(\mathbb{R})$ אזי יש $A^* \in M_n(\mathbb{R})$!-

מה מוגדר ← $\boxed{A^*_{ij} := (-1)^{i+j}|M_{ij}(A)|}$ → איך מוגדר

סימן הגדרה

דוגמא:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} |M_{11}(A)| & -|M_{12}(A)| & |M_{13}(A)| \\ -|M_{21}(A)| & |M_{22}(A)| & -|M_{23}(A)| \\ |M_{31}(A)| & -|M_{32}(A)| & |M_{33}(A)| \end{pmatrix}$$

דוגמא מספרית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 16 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 16 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 12 & -7 & 1 \\ -16 & 12 & -2 \\ 6 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

6

$$A\cdot(A^*)^T=\begin{pmatrix}1&2&4\\1&3&9\\1&4&16\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}12&-16&6\\-7&12&-5\\1&-2&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=2\cdot I_3$$

$$A\cdot\frac{1}{2}(A^*)^T=I_n\Rightarrow\frac{1}{2}(A^*)^T=A^{-1}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}6&-8&3\\-3.5&6&-2.5\\0.5&-1&0.5\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A\cdot(A^*)^T=|A|\cdot I_n}$$

טענה:

אם במטריצה ריבועית מסדר n ($n\geq2$) יש 2 שורות פרופורציוניות, אזי $|A|=0$

שורות פרופורציוניות:

$$\boxed{\lambda\cdot A_i=A_j}$$
$$\boxed{\lambda\cdot A_j=A_i}$$

למשל:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\2&4&6\end{pmatrix}$$

A_1 ו- A_3 פרופ'.

אינדוקציה לפי n:

בדיקה: $n=2$:

$$\begin{vmatrix}a&b\\\lambda a&\lambda b\end{vmatrix}=a\cdot\lambda b-b\cdot\lambda a=0$$

או

$$\begin{vmatrix}\lambda c&\lambda d\\c&d\end{vmatrix}=\lambda cd-c\lambda d=0$$

ד.

הנחת האינדוקציה: דטרמיננטה של כל מטריצה
מסדר $n-1$ שיש בה 2 שורות פרופ' שווה ל-0.
ניקח מטריצה A מסדר n. נניח ש- $A_j=\lambda\cdot A_i$
כאשר $i\neq j$.

$$\begin{array}{l} A_i \\ A_j \end{array}\begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix}$$

אפשר להניח ש- $n\geq 3$.

נקח $k\neq i,j$ ונפתח את הדטרמיננטה ($|A|$) לפי שורה ה-k.

$$\begin{array}{l} A_i \\ k \\ A_j \end{array}\begin{pmatrix} \text{---} & & & \\ A_{k1} & A_{k2} & \cdots & A_{kn} \\ \text{---} & & & \end{pmatrix}$$

$$|A|=\sum_{s=1}^{n}(-1)^{k+s}\cdot A_{ks}\cdot|M_{ks}(A)|$$

השורות ה-i וה-j נשארות במטריצה מינורית
$M_{ks}(A)$

לכן ב- $M_{ks}(A)$ יש שני שורות פרופ' לפי
הנחת האינדוקציה $|M_{ks}(A)|=0$ לכל
$1\leq s\leq n$ $\Leftarrow$ $|A|=0$. מ.ש.ל.

19. נתון A, B הפיכות

הוכח $A+B$ הפיכה $\Longleftrightarrow$ $A^{-1}+B^{-1}$ הפיכה.

($\Longrightarrow$) $A+B$ הפיכה, A^{-1}, B^{-1} הפיכות.

מכפלתן בסדר כלשהו גם הפיכה.

$$A^{-1}(A+B)\cdot B^{-1}$$
$$=(A^{-1}A+A^{-1}B)\cdot B^{-1}$$
$$=(I+A^{-1}\cdot B)\cdot B^{-1}$$
$$=B^{-1}+A^{-1}\cdot \cancel{B\cdot B^{-1}}$$
$$=B^{-1}+A^{-1}$$

($\Longleftarrow$)
$$A\cdot(A^{-1}+B^{-1})\cdot B$$
$$=(I+AB^{-1})\cdot B$$
$$=B+A=A+B$$

30. A הפיכה מקיימת $(I+A)^{-1}=I+A^{-1}$

$\Longleftrightarrow$ $A^2+A+I=0$

$$(I+A)^{-1}=I+A^{-1} \Longleftrightarrow A^2+A+I=0$$

הוכחה:

($\Longleftarrow$) נתון: $A^2+A+I=0$

$$(I+A)\cdot X=I$$

צ"ל X שמקיים

$$A\cdot/\ X+AX=I$$
$$AX+A^2X=A$$
$$\Downarrow$$
$$AX+(-A-I)\cdot X=A$$
$$AX-AX-X=A$$
$$X=-A$$

1.

נשאר להוכיח ש- $-A = I + A^{-1}$

$I + A^{-1} + A = 0$

הוכחנו ש- $(I+A)^{-1} = -A$

צ"ל: $(I+A)^{-1} = I + A^{-1}$

$$I + A^{-1} = -A$$
$$\Updownarrow$$
$$I + A^{-1} + A = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$A + I + A^2 = 0$$

נתון. מ.ש.ל.

דרך קצרה יותר: $(\Leftarrow)$

$$A^2 + A + I = 0$$
$$\Downarrow$$
$$A + I = -A^2$$
$$\Downarrow$$
$$(A+I)^{-1} = -A^2$$

צ"ל: $I + A^{-1} = -A^{-2}$

$I + A^{-1} + A^{-2} = 0$ שקול ל- $A^2 + A + I = 0$

$(\Rightarrow)$

נתון: $(I+A)^{-1} = I + A^{-1}$

$$(I+A)\cdot(I+A^{-1}) = I$$
$$I + A + A^{-1} + I = I$$
$$\Updownarrow$$
$$A\cdot / \quad I + A + A^{-1} = 0$$
$$A^2 + A + I = 0$$

ליניארית - שיעור 10

אם $A\in M_n(\mathbb{R})$ אזי $\mathrm{adj}(A) = A^* \in M_n(\mathbb{R})$

$$\boxed{A^*_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot |M_{ij}(A)|}$$

$$\boxed{A\cdot (A^*)^T = |A|\cdot I_n}$$

$$\Downarrow\ |A|\neq 0$$

$$A\cdot \frac{1}{|A|}\cdot (A^*)^T = I_n$$

אם $|A|\neq 0$ אז A הפיכה $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A^*)^T$!-

דוגמא:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 7\end{pmatrix} \Longrightarrow A^* = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix}5&6\\8&7\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}4&6\\7&7\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}4&5\\7&8\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2&3\\8&7\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&3\\7&7\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&2\\7&8\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}2&3\\5&6\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&3\\4&6\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&2\\4&5\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

הוכחה: $\boxed{A\cdot (A^*)^T = |A|\cdot I_n \qquad (A^*_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}(A)| \quad)}$

פיתוח דטרמיננטה לפי שורה ה-i

$$\boxed{|A| = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{i+s}\cdot A_{is}\cdot |M_{is}(A)|}$$

טענת עזר:

אם $1\le i\neq k\le n$ אזי

$$\boxed{0 = \sum_{s=1}^{n} A_{is}\,(-1)^{k+s}\cdot |M_{ks}(A)|}$$

דוגמא: נקח $i=1$, $k=3$

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix} = A_{11}\cdot(-1)^4|M_{31}(A)| + A_{12}(-1)^5\cdot|M_{32}(A)| + (-1)^6\cdot A_{13}\cdot|M_{33}(A)|$$

$$= A_{11}\cdot(A_{12}\cdot A_{23} - A_{13}\cdot A_{22}) - A_{12}\cdot(A_{11}\cdot A_{23} - A_{13}\cdot A_{21}) + A_{13}\cdot(A_{11}\cdot A_{22} - A_{12}\cdot A_{21})$$

מתאפס   מתאפס

$$= 0$$

הוכחה: (טענת עזר)

נבנה מטריצה B:

$$B_l = \begin{cases} A_l, & l \neq k \\ A_i, & l = k \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{11} & A_{12} & A_{13} \end{pmatrix}$$

מכיון ששתי שורות של B שוות ($B_i = B_k$)

הדטרמיננטה שלה שווה ל-0, כלו' $|B| = 0$.

נפתח את $|B|$ לפי שורה ה-k:

$$0 = |B| = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{k+s} \cdot B_{ks} \cdot |M_{ks}(B)| \quad *$$

$$B_{ks} = A_{is} \quad \Leftarrow \quad B_k = A_i$$

לכל $1 \le s \le n$

מכיון שכל השורות של B,

פרט לשורה ה-k, שוות

לשורות של A אנו מקבלים:

$$B = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

$$M_{ks}(B) = M_{ks}(A)$$

.2

נוכיח כי- (*)

$$0=\sum_{s=1}^{n}(-1)^{k+s}\cdot A_{is}\,|M_{ks}(A)|$$ מ.ש.ל.

משפט: $A\cdot(A^*)^T=|A|\cdot I_n$ לכל $A\in M_n$

הוכחה:

$$(A\cdot(A^*)^T)_{ik}\ \underset{\text{צ"ל}}{=}\ (|A|I_n)_{ik}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} |A| & & 0 \\ & |A| & \\ 0 & \ddots & |A| \end{pmatrix}_{ik}$$

$$=\begin{cases}0, & i\neq k\\ |A|, & i=k\end{cases}$$

$$(A\cdot(A^*)^T)_{ik}=\sum_{s=1}^{n}A_{is}\left((A^*)^T\right)_{sk}$$

$$=\sum_{s=1}^{n}A_{is}\cdot(A^*)_{ks}=\underline{\sum_{s=1}^{n}A_{is}\cdot(-1)^{k+s}\cdot|M_{ks}(A)|}$$

לפי טענת עזר הסיגמה האחרונה שווה לאפס כאשר $k\neq i$

כאשר, $k=i$ הסיגמה האחרונה שווה ל-:

$$\boxed{\sum_{s=1}^{n}A_{is}\cdot(-1)^{i+s}\cdot|M_{is}(A)|=|A|}$$ מ.ש.ל.

.3

מסקנה:

אם $|A|\neq 0$, A הפיכה !

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot (A^*)^T}$$

<u>דוגמא:</u>

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{matrix}0&1\\1&0\\1&1\end{matrix}$$

$0+0+0=0$

$0+1+1=2$

$|A|=2 \Rightarrow$ A הפיכה.

$$A^*=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$A^*=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

מטריצה
סימטרית.
אם משחלפים
היא נשארת אותו
הדבר.

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

פתרון של ממ"ל ע"י דטרמיננטות:

נוסחאות קרמר:

ממ"ל בצורה מטריציאלית: $\boxed{A\cdot X=B}$

נניח ש- A הפיכה $\Leftarrow$ $A\in M_n(\mathbb{R})$ -! , $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix}B_1\\ \vdots\\ B_n\end{pmatrix}$

$$A^{-1}\cdot AX=A^{-1}\cdot B$$

$$\boxed{X=A^{-1}\cdot B}$$

$$\Downarrow |A|\neq 0$$

$$\boxed{X=\frac{1}{|A|}(A^*)^T\cdot B}$$

נפתח:

$$X=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}|M_{11}(A)| & -|M_{12}(A)| & \dots & (-1)^{1+n}\cdot|M_{1n}(A)|\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \vdots\end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix}B_1\\ \vdots\\ B_n\end{pmatrix}$$

$$X_1=\frac{1}{|A|}\cdot\left(|M_{11}(A)|\cdot B_1-|M_{12}(A)|\cdot B_2+\dots+(-1)^{1+n}\cdot|M_{n1}(A)|\cdot B_n\right)$$

$$\boxed{=\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix}B_1 & & & & \\ B_2 & A^2 & A^3 & \dots & A^n\\ \vdots & & & & \\ B_n & & & & \end{vmatrix}}$$

$$\boxed{X_1=\frac{|B\,A^2\dots A^n|}{|A|}}\qquad\boxed{X_2=\frac{|A^1\,B\,A^3\dots A^n|}{|A|}}$$

.5

כלל:

$$\boxed{X_k = \frac{|A^1 \dots A^{k-1} B A^{k+1} \dots A^n|}{|A|}}$$

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$

צ"ל פרבולה שעוברת דרך

$(1,2), (2,3), (3,5)$

$y = ax^2 + bx + c$

$$\begin{cases} a+b+c=2 \\ 4a+2b+c=3 \\ 9a+3b+c=5 \end{cases}$$

3x3

$18+3+4=25$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 9 & 3 & 1 & 9 & 3 \end{array}\right| \qquad 23-25=-2$$

$2+9+12=23$

$$a = \frac{\begin{array}{c} B \\ \downarrow \end{array}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 9 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$C = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 5 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 2$$

סיבוכיות: $n!(n-1) \sim n^{\frac{n}{2}}$

הכי טוב: n^3

חישוב הדטרמיננטה ע"י פעולות אלמנטריות:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \Leftarrow \det(A) = \det(A_1 A_2 \dots A_n)$$

למשל:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \det((1,2,3),(4,5,6),(7,8,9))$$

משפט:

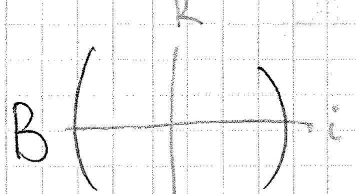
$$\det(\overbrace{A_1, \dots, kA_i, \dots, A_n}^{B}) = k \cdot \det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_n)$$

k סקלר כלשהו.

נפתח את $|B|$ לפי שורה ה-i

$$|B| = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{i+s} \cdot B_{is} \cdot |M_{is}(B)|$$

$$B_{is} = k \cdot A_{is} \Leftarrow B_i = kA_i$$



ד.

מכיוון שכל השורות של B שוות לשורות של A

(פרט משורה ה-i) אנו מקבלים

$$M_{is}(B) = M_{is}(A)$$

$$\Downarrow$$

$$|M_{is}(B)| = |M_{is}(A)|$$

$$|B| = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{i+s} \cdot K \cdot A_{is} \cdot |M_{is}(A)|$$

$$= K \sum_{s=1}^{n} (-1)^{i+s} \cdot A_{is} \cdot |M_{is}(A)|$$

$$= K \cdot |A|$$

מ.ש.ל.

דוגמא:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 12 & 27 \\ 10 & 20 & 40 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 12 & 27 \\ 10 & 20 & 40 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 10 & 20 & 40 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot 10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

סעיף ה:

$$\det\overbrace{(A_1, \dots, \underset{B_i + C_i}{\overset{\shortparallel}{A_i}}, \dots, A_n)}^{A} = \det\overbrace{(A_1, \dots, B_i, \dots, A_n)}^{B} + \det\underbrace{(A_1, \dots, C_i, \dots, A_n)}_{C}$$

פירושו:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ (-1)+2 & 3+5 & 0+4 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

B_2 $\quad$ C_2

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$A_2 = B_2 + C_2$

$$A_1 \cdots (B_i + C_i) \cdots A_n = A_1 \cdots B_i \cdots A_n + A_1 \cdots C_i \cdots A_n.$$

$A_k = B_k = C_k$ לכל $k \neq i$

ו- $A_i = B_i + C_i$

נפתח $|A|$ לפי שורה ה-i

$$|A| = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{i+s} \cdot A_{is} |M_{is}(A)|$$

$$= \sum_{s=1}^{n} (-1)^{i+s} (B_{is} + C_{is}) \cdot |M_{is}(A)|$$

$$= \sum_{s=1}^{n} (-1)^{i+s} \left(B_{is} |M_{is}(A)| + C_{is} |M_{is}(A)| \right)$$

$$= \sum_{s=1}^{n} (-1)^{i+s} B_{is} |M_{is}(A)| + \sum_{s=1}^{n} (-1)^{i+s} \cdot C_{is} |M_{is}(A)|$$

מכיון כל השורות של A,B,C שוות בכל פרט משורה ה-i, אזי מקבלים $M_{is}(A) = M_{is}(B) = M_{is}(C)$

אז:

$$|A| = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{i+s} \cdot B_{is} |M_{is}(B)| + \sum_{s=1}^{n} (-1)^{i+s} \cdot C_{is} |M_{is}(C)|$$

$$= |B| + |C|$$

מ.ש.ל.

9.

טענה:

פעולה אלמנטרית $R_i \leftarrow R_i + aR_j \,, \quad i \neq j$

לא משנה את ערך הדטרמיננטה.

הוכחה:

נניח ש- $i=1$ ו- $j=2$

$$A=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \underset{R_1 \leftarrow R_1 + aR_2}{\sim} \begin{pmatrix} A_1 + aA_2 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

$$\det(A_1 + aA_2, A_2, A_3, \dots A_n) \underset{\text{לפי טענה קודמת}}{=}$$

$$\det(A_1, A_2, \dots A_n) + \underbrace{\det(aA_2, A_2, \dots A_n)}_{=0}$$

פרופ׳

לכן

$$\det(A_1 + aA_2, \dots, A_n) = \det(A_1, \dots, A_n)$$ מ.ש.ל.

דוגמא:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{R_2 \leftarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - R_1 \\ R_4 \leftarrow R_4 - R_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{R_4 \leftarrow R_4 - R_2}{=} (-8) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{R_4 \leftarrow R_4 - R_3}{=}$$

.10

$$= (-8)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-8)\cdot(-1) = 8$$

. ||

לינארית - שיעור 11

תזכורת:

B מתקבלת מ- A ע"י פעולה אלמנטרית אחת: P

- $|B|=|A| \Longleftarrow P=R_i\leftarrow R_i+aR_j$
- $|B|=a|A| \Longleftarrow P=R_i\leftarrow aR_i$

$a\neq 0$

טענה:

אם מטריצה ריבועית B מתקבלת מ-A ע"י החלפת שורות $R_i \leftrightarrow R_j$ אז $|B|=-|A|$

הוכחה:

$$\det(A_1,A_2,\dots,A_n)=\det(A)$$

נניח, לצורך העניין $P=R_1\leftrightarrow R_2$

$$\det(A_2,A_1,\dots,A_n)=\det(B)$$

נביט בדטרמיננטה

$$\det(A_1+A_2,A_1+A_2,A_3,\dots,A_n)=0$$

כי יש בה שתי שורות זהות.

תזכורת:

$$\det(A_1,\dots,A_{i-1},B_i+C_i,A_{i+1},\dots,A_n)=$$
$$\det(A_1,\dots,A_{i-1},B_i,A_{i+1},\dots,A_n)+\det(A_1,\dots,A_{i-1},C_i,A_{i+1},\dots,A_n)$$

$$0=\det(A_1+A_2,A_1+A_2,A_3,\dots,A_n)=\det(A_1,A_1+A_2,A_3,\dots,A_n)\ (*)+$$
$$\det(A_2,A_1+A_2,A_3,\dots,A_n)\ (*)$$

הדטרמיננטה הזאת מתקבלת מ- $\det(A)$ ע"י פעולה:

$$R_2\leftarrow R_2+R_1$$

לכן היא שווה ל- $\det(A)$

$$\circledast \underset{R_2 \leftarrow R_2 - R_1}{=} \det(A_2, A_1, A_3, \dots, A_n)$$

$$\circledast \underset{R_2 \leftarrow R_2 - R_1}{=} \det(A_1, A_2, \dots, A_n)$$

קיבלנו

$$\det(A_1, A_2, \dots, A_n) + \det(A_2, A_1, A_3, \dots, A_n) = 0$$

מ.ש.ל.

פתרון א:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{=}{R_1 \leftrightarrow R_2} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{=}{\substack{R_4 \leftarrow R_4 - R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - R_1}}$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \underset{=}{\substack{R_3 \leftarrow R_3 - R_2 \\ R_4 \leftarrow R_4 - R_2}} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} \underset{=}{R_4 \leftarrow R_4 - \tfrac{1}{2} R_3}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} = -3$$

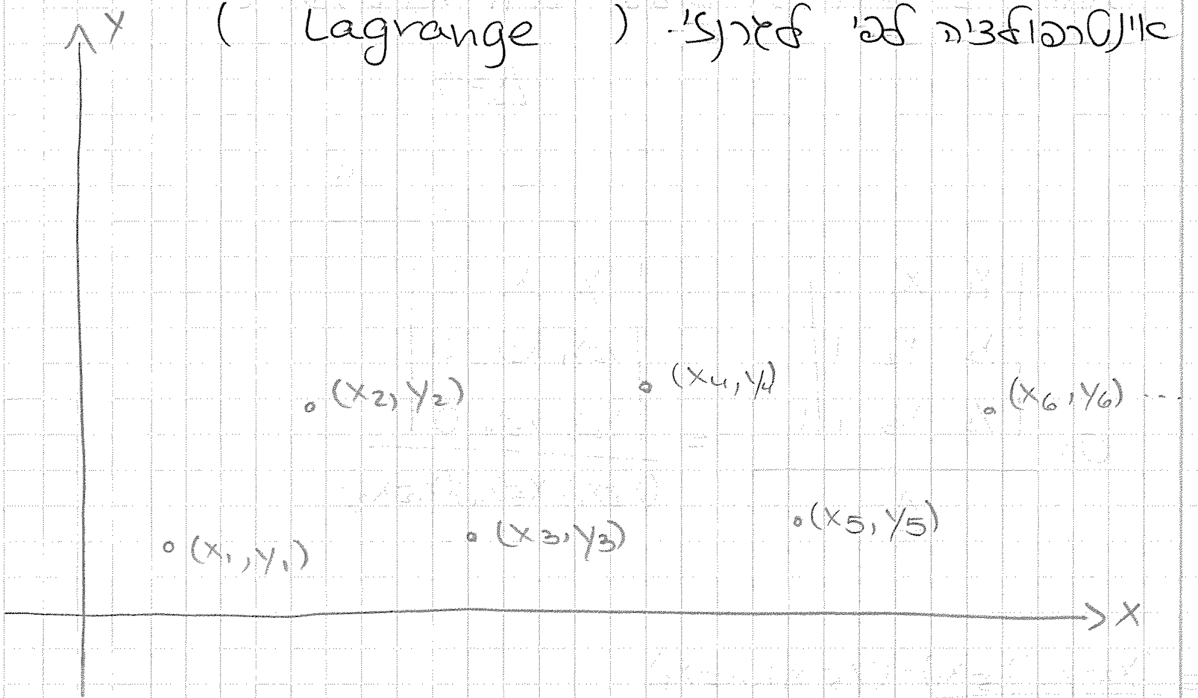
(איך שמחשב היה מחשב את הדטרמיננטה)

דרך II (יותר מהירה/קלה)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{=}{R_1 \leftarrow R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$=3\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}\begin{matrix}R_2\leftarrow R_2-R_1\\R_3\leftarrow R_3-R_1\\=\\R_4\leftarrow R_4-R_1\end{matrix}\;3\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{vmatrix}=-3$$

אינטרפולציה לפי לגרנז' (Lagrange)



$$f(x)=a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\dots+a_1x+a_0$$

3 נקודות: $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$

$$y=ax^2+bx+c$$

נקודות שונות.

$$\begin{cases}ax_1^2+bx_1+c=y_1\\ax_2^2+bx_2+c=y_2\\ax_3^2+bx_3+c=y_3\end{cases}$$

כאשר הדטרמיננטה שווה ל-0 ישנו פתרון יחיד למערכת.

$$\Delta=\begin{vmatrix}x_1^2&x_1&1\\x_2^2&x_2&1\\x_3^2&x_3&1\end{vmatrix}=\begin{matrix}C_1\leftarrow C_1-x_1^2C_3\\C_2\leftarrow C_2-x_1C_3\end{matrix}\begin{vmatrix}0&0&1\\x_2^2-x_1^2&x_2-x_1&1\\x_3^2-x_1^2&x_3-x_1&1\end{vmatrix}$$

$$=+1\cdot\begin{vmatrix}x_2^2-x_1^2&x_2-x_1\\x_3^2-x_1^2&x_3-x_1\end{vmatrix}=(x_2-x_1)\cdot(x_3-x_1)\cdot\begin{vmatrix}x_2+x_1&1\\x_3+x_1&1\end{vmatrix}$$

.3

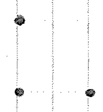
$$= (x_2-x_1)\cdot(x_3-x_1)\cdot(x_2-x_3)$$

$$x_1 \neq x_2 \quad \wedge \quad x_3 \neq x_1 \quad \wedge \quad x_2 \neq x_3 \iff \Delta \neq 0$$

$$\Downarrow$$

יש פרבולה יחידה שעוברת דרך 3 נקודות.

$$\Delta = 0$$



$\leftarrow$ לא פונקציה.

$$a = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2 & 1 \\ y_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & x_1 & 1 \\ y_2-y_1 & x_2-x_1 & 0 \\ y_3-y_1 & x_3-x_1 & 0 \end{vmatrix}}{(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_2-x_3)}$$

$$= \frac{(y_2-y_1)(x_3-x_1)-(y_3-y_1)(x_2-x_1)}{(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_2-x_3)}$$

$a=0$ 3 נקודות $(x_1,y_1)(x_2,y_2)(x_3,y_3)$

נמצאים על ישר אחד

$$(y_2-y_1)(x_3-x_1)-(y_3-y_1)(x_2-x_1)=0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}$$

דטרמיננטה של Vandermonde:

$$V(x_1,x_2,\ldots,x_n) := \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$V(x_1,x_2)=\begin{vmatrix}1 & x_1\\ 1 & x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1$$

$$V(x_1,x_2,x_3)=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2\\ 1 & x_2 & x_2^2\\ 1 & x_3 & x_3^2\end{vmatrix}$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)$$

$$V=(x_1,x_2,x_3,x_4)=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3\\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3\\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3\\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3\end{vmatrix}\underset{C_4\leftarrow C_4-x_1C_3}{=}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & 0\\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^2(x_2-x_1)\\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^2(x_3-x_1)\\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^2(x_4-x_1)\end{vmatrix}\underset{C_3\leftarrow C_3-x_1C_2}{=}\begin{vmatrix}1 & x_1 & 0 & 0\\ 1 & x_2 & x_2(x_2-x_1) & x_2^2(x_2-x_1)\\ 1 & x_3 & x_3(x_3-x_1) & x_3^2(x_3-x_1)\\ 1 & x_4 & x_4(x_4-x_1) & x_4^2(x_4-x_1)\end{vmatrix}\underset{C_2\leftarrow C_2-x_1C_1}{=}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & x_2-x_1 & x_2(x_2-x_1) & x_2^2(x_2-x_1)\\ 1 & x_3-x_1 & x_3(x_3-x_1) & x_3^2(x_3-x_1)\\ 1 & x_4-x_1 & x_4(x_4-x_1) & x_4^2(x_3-x_1)\end{vmatrix}=(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2\\ 1 & x_2 & x_2^2\\ 1 & x_3 & x_3^2\end{vmatrix}}_{V(x_1,x_2,x_3)}$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)(x_3-x_2)(x_4-x_2)(x_4-x_3)$$

$$V(x_1,x_2,\dots,x_n)=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$$ סכום מכפלה.

$$V(x_1,\dots,x_n)=0\iff\exists\, i\ne j:\ x_i=x_j$$

משפט:

דרך n נקודות במישור $(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)$

שה-x-ים של הנקודות שונים זה מזה אפשר להעביר דרך .5

פולינום יחיד ממעלה n

תכונות של דטרמיננטה (המשך)

משפט:

דטרמיננטה הינה פונקציה כיפלית

$$|AB| = |A|\cdot|B|$$

לכל $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

(נבדוק עבור $n=2$)

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

$$|B| = x\cdot w - y\cdot z \qquad |A| = ad - bc$$

$$|A\cdot B| = \begin{vmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{vmatrix} = (ax+bz)(cy+dw)-(ay+bw)(cx+dz)$$

$$= axcy + axdw + bzcy + bzdw - (aycx + aydz + bwcx + bwdz)$$

$$= \underline{ad}xw + \underline{bc}zy - \underline{ad}yz - \underline{bc}wx = ad(xw-yz)+bc(zy-wx) =$$

$$= (ad-bc)(xw-yz) = |A|\cdot|B|$$

מסקנה:

אם A הפיכה, אזי $|A| \neq 0$!

$$|A^{-1}| = |A|^{-1}$$

הוכחה:

A הפיכה $\Leftarrow$ קיימת $A^{-1} \in M_n(\mathbb{R})$ כך ש-:

$$A\cdot A^{-1} = I_n \Longrightarrow |A\cdot A^{-1}| = |I_n| = 1$$

לפי המשפט:

$$|A\cdot A^{-1}| = |A|\cdot|A^{-1}| \text{ ולכן } |A|\cdot|A^{-1}| = 1$$

.6

$\Leftarrow$ $|A|\neq 0$ וגם $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$. מ.ש.ל.

מסקנה: $A\in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה $\Longleftrightarrow$ $|A|\neq 0$.

טענה: לכל $m\in\mathbb{N}$ מתקיים $|A^m|=|A|^m$

להוכיח בבית באינדוקציה!

שאלה 38:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix} = (5-n)\cdot 2^{n-2}$$

n	הנוסחה	מטריצה
1	2	(2)
2	3	$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$
3	4	$\begin{vmatrix} 2 & 0 & \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

נניח שהנוסחה נכונה עבור x. נוכיח את נכונותה עבור סדר x+1.

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & & & 1 \\ & 2 & 0 & 1 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}}_{D_{x+1}} = 2\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & & 0 & \vdots \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}}_{D_x} + (-1)^{x+2}\cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot D_x + (-1)^{x+2}\cdot(-1)^{x+1}\cdot 2^{x-1}$$

קיבלנו: $D_{x+1}=2D_x-2^{x-1}$

לפי הנחת האינדוקציה:

$$=2\cdot(5-x)\cdot 2^{x-2}-2^{x-1}=2^{x-1}(5-x)-2^{x-1}$$

$$=2^{x-1}\cdot(4-x)$$

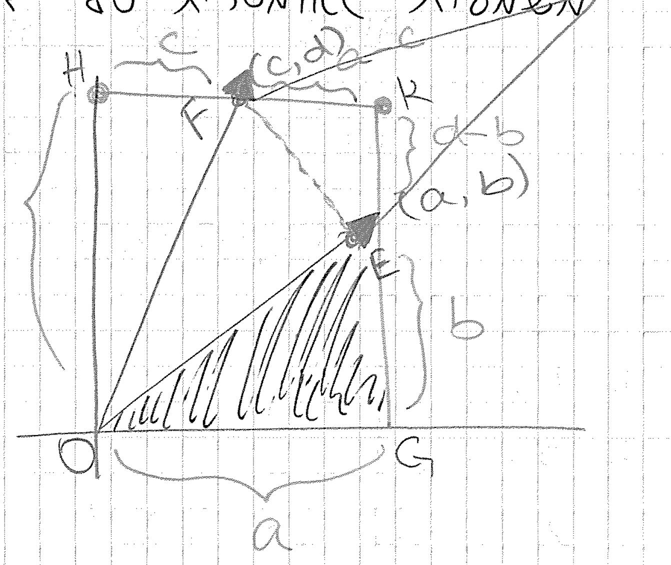
מ.ש.ל.

ד.

חוזרים לתכונות של דטרמיננטה:

משמעות גאומטרית של דטרמיננטה:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$



$S_{\text{מלבן}} = a \cdot d$

$$S_{OEG} = \frac{ab}{2}$$

$$S_{HFO} = \frac{dc}{2}$$

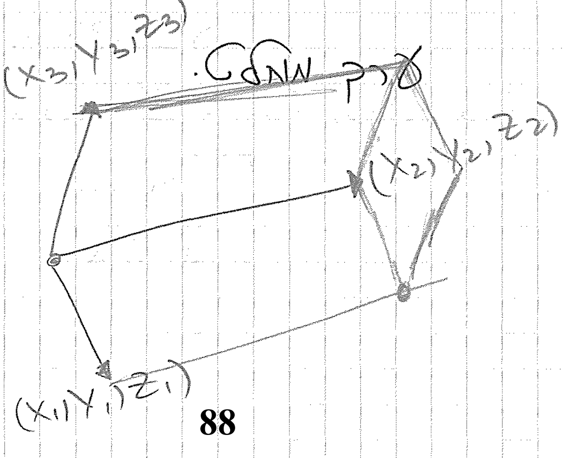
$$S_{FKE} = \frac{(a-c)(d-b)}{2}$$

$$S_{OEF} = ad - \frac{ab}{2} - \frac{dc}{2} - \frac{(a-c)(d-b)}{2}$$

$$S_{OEF} = \frac{\cancel{2}ad - \cancel{ab} - \cancel{dc} - \cancel{ad} + \cancel{ab} + \cancel{cd} - cb}{2}$$

$$= \frac{ad - bc}{2}$$

$$S_{OEFO'} = ad - bc$$



.8

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

שאלה 9:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

9.

אלגברה ליניארית א' - תרגול 1.

רענן שכטר
054-5331043

מערכת משוואות ליניאריות:

I משוואה ממעלה ראשונה עם נעלם אחד.

$$ax=b$$

1. אם $a\neq 0$ אז למשוואה יש פתרון יחיד: $x=\frac{b}{a}$

דוגמה: $5x=7 \leftarrow x=\frac{7}{5}$

2. אם $a=0$

א. אם $b=0$ אז למשוואה יש אינסוף פתרונות.

ב. אם $b\neq 0$ אז למשוואה אין פתרון

דוגמה: $0\cdot x=1$ אין פתרון.

II 2 משוואות עם 2 נעלמים ממעלה ראשונה.

43.

$$\begin{array}{l} x+y=7 \\ -\ x-y=1 \\ \hline 2y=6 \\ y=3 \\ x+3=7 \\ x=4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x+y=7 \\ x-y=1 \end{array} \quad R_2-R_1\to R_2$$

$$\begin{array}{l} x+y=7 \\ 2y=6 \end{array} \quad \frac{R_2}{2}\to R_2$$

$$\begin{array}{l} x+y=7 \\ y=3 \end{array}$$

$$x+3=7$$

$$x=4$$

44.

$$\begin{array}{l} x+2y=5 \\ x+y=3 \\ \hline \end{array} \quad R_1-R_2\to R_2$$

$$\begin{array}{l} x+2y=5 \\ y=2 \end{array}$$

$$x+2=3$$

$$x=1$$

46.

$$\begin{array}{l} 2x-y=7 \\ x-y=5 \\ \hline \end{array} \quad R_2\leftrightarrow R_1$$

$$\begin{array}{l} x-y=5 \\ 2x-y=7 \\ \hline y=-3 \end{array} \quad R_2-2R_1\to R_2$$

$$x+3=5$$

$$x=2$$

47.

$$\begin{array}{l} x+y=4 \\ 3x+y=4 \\ \hline \end{array} \quad R_1\leftrightarrow R_2$$

$$\begin{array}{l} 3x+y=4 \\ x+y=4 \\ \hline \end{array} \quad 3R_2-R_1\to R_2$$

$$\begin{array}{l} 2y=8 \\ y=4 \end{array} \quad \frac{R_2}{2}\to R_2$$

$$x+4=4$$

$$x=0$$

1

48

$$\begin{aligned} x - y &= -1 \\ 2x - 3y &= -1 \end{aligned}$$

$R_2 - 2R_1 \to R_2$

$$y = -1$$

$$x - (-1) = -1$$

$$x = -2$$

49

$2R_2 - 3R_1 \to R_2$

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ 3x + y &= 5 \end{aligned}$$

$\frac{R_2}{-7} \to R_2$

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ -7y &= -14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

$$2x + 6 = 8$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

51

$$\begin{aligned} 4x + 3y &= 2 \\ 4x - y &= 10 \end{aligned}$$

$R_1 - R_2 \to R_2$

$$4y = -8$$

$\frac{R_2}{4} \to R_2$

$$\begin{aligned} 4x + 3y &= 2 \\ 4y &= -8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x + 3y &= 2 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

$$4x + 3(-2) = 2$$

$$4x - 6 = 2$$

$$4x = 8$$

$$x = 2$$

.56

$$\begin{aligned} 7x+5y&=-3 \\ 2x+y&=-6 \end{aligned}$$

$2R_1-7R_2 \to R_2$

$$\begin{aligned} 7x+5y&=-3 \\ 3y&=36 \end{aligned}$$

$\frac{R_2}{3} \to R_2$

$$\begin{aligned} 7x+5y&=-3 \\ y&=12 \end{aligned}$$

-6 $+42$ 36

$12 \cdot 5 = 60$

$7x+5(12)=-3$

$7x+60=-3$

$7x=-63$

$x=-9$

דף עבודה 2:

.1

$R_2-R_1 \to R_2$

$$\begin{aligned} x+y&=2 \\ x+y&=5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y&=2 \\ 0&=3 \end{aligned}$$

שורת סתירה. אין פתרון!

.2

$R_2-R_1 \to R_2$

$$\begin{aligned} x-y&=2 \\ x+y&=4 \end{aligned}$$

$\frac{R_2}{2} \to R_2$

$$\begin{aligned} x-y&=2 \\ 2y&=2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x-y&=2 \\ y&=1 \end{aligned}$$

$x-1=2$

$x=3$

.3

$R_2-2R_1 \to R_2$

$$\begin{aligned} 2x+y&=3 \\ 4x+2y&=6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x+y&=3 \\ \cancel{0}&=\cancel{0} \end{aligned}$$

משוואה אחת עם 2 נעלמים לכן יש אינסוף פתרונות x משתנה קשור, y משתנה חופשי.

$x=-\frac{1}{2}y+\frac{3}{2} \leftarrow 2x=-y+3$

אפשר להציב y, נקבל x.

3

דוגמא:

$y=1 \rightarrow x=1$

$y=-1 \rightarrow x=2$

$y=0 \rightarrow x=\frac{3}{2}$

4.

$$R_2-3R_1\rightarrow R_2 \qquad \begin{array}{l} 3x-y=2 \\ 9x-3=6 \\ \hline 3x-y=2 \\ \cancel{0=0} \end{array}$$

משוואה אחת עם 2 נעלמים.

פתרון כללי: $3x=2+y$

$x=\frac{2+y}{3}$

5.

$$7R_2-R_1\rightarrow R_2 \qquad \begin{array}{l} 7x-y=9 \\ x+y=7 \\ \hline \end{array}$$

$7x-y=9$

$8y=40$

$y=5$

$7x-5=9$

$7x=14$

$x=2$

6.

$$R_2-4R_1\rightarrow R_2 \qquad \begin{array}{l} x+2y=1 \\ 4x+8y=5 \\ \hline x+2y=1 \\ 0=1 \end{array}$$

שורת סתירה!

אין פתרון!

III 3 משוואות עם 3 נעלמים ממעלה ראשונה:

.3

$$\begin{array}{rl}
 & x+y-z=-2 \\
R_2-2R_1\to R_2 & 2x+y+z=5 \\
R_3-3R_1\to R_3 & 3x+y+z=4
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
 & x+y-z=-2 \\
R_3-2R_2\to R_3 & -y+3z=9 \\
 & -2y-4z=10
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
 & x+y-z=-2 \\
\frac{R_3}{-2}\to R_3 & -y+3z=9 \\
 & -2z=-8
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
x+y-z=-2 \\
-y+3z=9 \\
z=4
\end{array}$$

$$-y+12=9$$
$$-y=-3$$
$$y=3$$
$$x+3-4=-2$$
$$x=-1$$

.12

$$\begin{array}{rl}
 & 2x+3y+z=6 \\
R_1\leftrightarrow R_2 & x-2y+4z=3 \\
 & 3x+4y-2z=5
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
 & x-2y+4z=3 \\
R_2-2R_1\to R_2 & 2x+3y+z=6 \\
R_3-3R_1\to R_3 & 3x+4y-2z=5
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
 & x-2y+4z=3 \\
\frac{R_2}{7}\to R_2 & 7y-7z=0 \\
 & -10y+14z=4
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
 & x-2y+4z=3 \\
R_3+10R_2\to R_3 & y-z=0 \\
 & 4z=4
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\frac{R_3}{4}\to R_3 & x-2y+4z=3 \\
 & y-z=0 \\
 & z=1
\end{array}$$

$z=1$ $\quad x-2+4=3$

$y=1$ $\quad x=1$

.5

דף עבודה ג.

19) $2x-3y=20$, $5x+6y=-4$
20) $3x-2y=-13$, $7x-6y=-37$
21) $-4x+3y=-11$, $8x+5y=11$

22) $3x+7y=-8$, $9x-4y=26$
23) $5x+2y=22$, $7x-8y=20$
24) $2x+3y=5$, $10x+5y=15$

25) $2x+3y=-1$, $5x-2y=7$
26) $3x+4y=-7$, $7x-3y=-4$
27) $5x-2y=3$, $7x-3y=3$

28) $4x+3y=1$, $9x+5y=-3$
29) $5x+2y=6$, $9x+5y=8$
30) $4x+7y=-10$, $3x-2y=7$

31) $5x+4y=14$, $8x+5y=0$
32) $6x+7y=12$, $-5x+6y=-10$
33) $7x-5y=-5$, $-8x+6y=4$

34) $7x-2y=-10$, $4x-9y=10$
35) $5x+3y=15$, $9x-8y=-40$
36) $4x-7y=1$, $9x-8y=10$

37) $8x-4y=-16$, $9x+6y=3$
38) $7x+25y=11$, $11x+10y=-12$
39) $9x+17y=1$, $6x+13y=-1$

40) $11x+12y=7$, $15x+9y=12$
41) $10x+12y=16$, $25x-8y=21$
42) $15x+10y=4$, $25x+12y=2$

משוואות מסודרות — שיטת ההצבה

הערה: כתרגול נוסף אפשר לפתור את המשוואות הבאות גם בשיטת השוואות המקדמים.

פתור את מערכות המשוואות הבאות בשיטת ההצבה:

43) $x+y=7$, $x-y=1$
44) $x+2y=5$, $x+y=3$
45) $x-3y=3$, $x+y=7$

46) $2x-y=7$, $x-y=5$
47) $x+y=4$, $3x+y=4$
48) $x-y=-1$, $2x-3y=-1$

49) $2x+3y=8$, $3x+y=5$
50) $2x+y=-3$, $3x-5y=2$
51) $4x+3y=2$, $4x-y=10$

52) $x-2y=9$, $2x+5y=0$
53) $5x-2y=-2$, $x+4y=4$
54) $x+3y=3$, $4x+5y=-9$

55) $3x-4y=10$, $x-5y=-15$
56) $7x+5y=-3$, $2x+y=-6$
57) $5x+6y=3$, $x+4y=-5$

58) $3x+2y=2$, $5x+2y=6$
59) $5x-4y=1$, $3x+4y=7$
60) $6x+5y=13$, $6x-4y=22$

61) $2x-3y=0$, $4x+5y=22$
62) $4x-3y=0$, $-5x+9y=21$
63) $10x+7y=5$, $5x+2y=-5$

64) $3x+2y=1$, $2x+3y=-1$
65) $5x-2y=2$, $-7x+3y=-1$
66) $4x+5y=-11$, $5x-3y=14$

67) $4x+3y=-10$, $3x+5y=-2$
68) $6x-7y=2$, $7x-8y=3$
69) $3x-8y=6$, $5x-7y=10$

משוואות לא מסודרות

הערה: מערכות נוספות של משוואות מופיעות בעמ' 170.

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

70) $2x-5=x-y+3$, $x+y=2y-x+4$
71) $x-1+y=4-x$, $3x-2=y+8$

72) $2x-1=x-3y+2$, $x-3+y=2x-1-y$
73) $3x-7-2y=x+y-5$, $3y-3=2x-7y+9$

74) $y-x+8=x-3$, $x-2y=2-y$
75) $2y-2x+3=2x-3y$, $-y+x=-1-3x$

76) $3y-x+2=4x+2-3y$, $2x-3-y=5y-4x+3$
77) $4x-7x+5=3x+y-2$, $5x+6y-8=6x-1$

78) $4x-y+2=x-y-4$, $2x+2y-1=3x-5$
79) $4x-y=5x-3+y$, $2x-3y-x=x+5+y-1$

80) $y=x-3$, $y=2x+4$
81) $y=-x+5$, $y=3x-3$

82) $y=4x-3$, $y=-5x+6$
83) $y=3x-2$, $y=7x+2$

84) $x+3(y-1)=1-x$, $4(x-2)+5y=-6$
85) $x-2(y-2)=1+y$, $5(x-2)+2y=-8$

86) $x-3(y-1)=16-x$, $5(x-1)+2y=-1$
87) $3(x+1)+4y=-2$, $2x-5(y+1)=9-2x$

דף עבודה ב.

פתור את מערכות המשוואות הבאות: (לחלק מהמערכות יש פתרון יחיד)

1) $\begin{cases} x+y=2 \\ x+y=5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x-y=2 \\ x+y=4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x+y=3 \\ 4x+2y=6 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x-y=2 \\ 9x-3y=6 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 7x-y=9 \\ x+y=7 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x+2y=1 \\ 4x+8y=5 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2(x-y)+4y=1+x \\ 2-7y+x=3(x-y) \end{cases}$

8) $\begin{cases} 4(y-1)+x=y-3 \\ x+6(y+1)=9-x \end{cases}$

תשובות (מערכות ללא פתרון ומערכות עם אינסוף פתרונות):

1) אין פתרון. 2) $(3,1)$. 3) אינסוף פתרונות. 4) אינסוף פתרונות. 5) $(2,5)$.

6) אין פתרון. 7) אינסוף פתרונות. 8) אין פתרון.

מערכות של שלוש משוואות ממעלה ראשונה עם שלושה נעלמים

פתור את מערכות המשוואות הבאות: עמודה אמצעית

1) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y-z=2 \\ x-y+z=4 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y+z=2 \\ x+y+z=6 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y-z=-2 \\ 2x+y+z=5 \\ 3x+y+z=4 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x+y-z=7 \\ x-y-z=-3 \\ x+2y+2z=6 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x+y=5 \\ x+z=7 \\ y+z=8 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x-y=-6 \\ x+z=1 \\ y-z=-3 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x-y=1 \\ x-z=-2 \\ y+z=3 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x+y+z=0 \\ y+3z=-1 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x+y+z=-4 \\ 3x+2y=-3 \\ 5x+3y=-3 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ x-y+z=0 \\ 4y+5z=1 \end{cases}$

11) $\begin{cases} 2x+y-3z=6 \\ x+2y+z=12 \\ 3x-5z=0 \end{cases}$

12) $\begin{cases} 2x+3y+z=6 \\ x-2y+4z=3 \\ 3x+4y-2z=5 \end{cases}$

13) $\begin{cases} 5x-3y-2z=-4 \\ -2x+4y+3z=-3 \\ x+2y+4z=2 \end{cases}$

14) $\begin{cases} 2x+4y+3z=-5 \\ 3x+3y+2z=0 \\ 5x+y+3z=1 \end{cases}$

15) $\begin{cases} 3x-2y-4z=4 \\ x+3y-2z=8 \\ 2x-4y+3z=3 \end{cases}$

תשובות (מערכות של שלוש משוואות ממעלה ראשונה עם שלושה נעלמים):

1) $(2,-1,1)$. 2) $(1,2,3)$. 3) $(-1,3,4)$. 4) $(0,5,-2)$. 5) $(2,3,5)$.

6) $(-4,2,5)$. 7) $(1,0,3)$. 8) $(5,-7,2)$. 9) $(3,-6,-1)$. 10) $(7,4,-3)$.

11) $(0,6,0)$. 12) $(1,1,1)$. 13) $(-2,-4,3)$. 14) $(2,0,-3)$. 15) $(4,2,1)$.

אלגברה ליניארית - תרגול 2:

מערכת משוואות: דף 1:

8

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 3 & 4 & 5 & 12 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2-2R_1\to R_2 \\ R_3-3R_1\to R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1-R_2\to R_1 \\ R_3-R_2\to R_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right) \frac{R_3}{-2}\to R_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1-R_3\to R_1 \\ R_2-R_3\to R_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} x=2 \\ y=-1 \\ z=2 \end{array}$$

דף 2:

10

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 5 & 11 \\ 5 & -6 & 7 & 17 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2-3R_1\to R_2 \\ R_3-5R_1\to R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} -R_2\to R_2 \\ R_3-R_2\to R_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) R_1+R_2\to R_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

2 תלויים x, y

1 חופשי - z

אוסף פתרונות: $x=1+z \quad y=2z-2$

$(1+z,\ 2z-2,\ z)$

דף 1:

9

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & 3 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2-2R_1\to R_2 \\ R_3-4R_1\to R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -7 \\ 0 & -1 & -1 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \frac{R_2}{-1}\to R_2 \\ R_3+R_2\to R_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) R_1+R_2\to R_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

x, y - תלויים

z - חופשי

אוסף פתרונות: $x=11-2z \ , \ y=7-z$

$(11-2z,\ 7-z,\ z)$

1

18

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 3 & 12 \\ 6 & 15 & 15 & 34 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2-3R_1 \to R_2 \\ R_3-6R_1 \to R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & -3 & -9 & -12 \\ 0 & -3 & -9 & -14 \end{array}\right) \frac{R_2}{-3} \to R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -9 & -14 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_3+3R_2 \to R_3 \\ R_1-R_2 \to R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

שורת סתירה.

שורת סתירה! אין פתרון.

סע' 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 10 \\ 3 & 4 & 5 & 12 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2-2R_1 \to R_2 \\ R_3-3R_1 \to R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1-R_2 \to R_1 \\ R_3-R_2 \to R_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \frac{R_3}{-2} \to R_3 \\ R_1-R_3 \to R_1 \\ R_2-R_3 \to R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

כל המשתנים גלויים לכן קיים פתרון 1:

$x=1,\ y=1,\ z=1$

סע' 4:

1

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 5 & 3 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2-R_1 \to R_2 \\ R_3-4R_1 \to R_3 \\ R_4-5R_1 \to R_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right) \frac{R_2}{-2} \to R_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_3+2R_2 \to R_3 \\ R_4+2R_2 \to R_4 \\ R_1-R_2 \to R_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

x,y - קשורים

z,w - חופשיים

אינסוף פתרונות: $x=2-z\ ,\ y=-2-w$

$(2-z\ ,-2-w, z\ , w)$

2

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 17 & 23 & 29 & 35 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-11R_1 \to R_3]{R_2-6R_1 \to R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -20 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -20 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{R_2}{-5} \to R_2]{R_3+R_2 \to R_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1-2R_2 \to R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

קשורים: x_1, x_2 , חופשיים: x_3, x_4

אינסוף פתרונות: $x_2 = 4-2x_3-3x_4$, $x_1 = 1x_3+2x_4-3$

פתרון כללי: $(1x_3+2x_4-3,\ 4-2x_3-3x_4,\ x_3,\ x_4)$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 4 & 5 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & -15 \\ 9 & 6 & 9 & 3 & 15 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 & 9 \\ 6 & 4 & 5 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & -15 \\ 9 & 6 & 9 & 3 & 15 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_3-R_1 \to R_3 \\ R_2-2R_1 \to R_2 \\ R_4-3R_1 \to R_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -24 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -12 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_3-2R_2 \to R_3 \\ R_4-R_2 \to R_4 \\ \frac{R_2}{-3} \to R_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \quad R_1-4R_2 \to R_1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

קשורים - x_1, x_3

חופשיים - x_2, x_4

$$x_1 = \frac{-7-x_4-2x_2}{3}$$

$x_3 = 4$

פתרון כללי:

$$\left(\frac{-7-x_4-2x_2}{3},\ x_2,\ 4,\ x_4\right)$$

משוואה הומוגנית:

תרגיל:

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 4x+5y+6z=0 \\ 7x+8y+9z=0 \end{cases}$$

משוואה הומוגנית.

כל המשוואות שוות ל-0.

כמו הציוני שאין פתרון למערכת

זו!!

יכול להיות

שיש פתרון

יחיד והוא

תמיד יהיה:

$x=0, y=0, z=0 \to$ פתרון טריוויאלי!

3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2-4R_1 \to R_2 \\ R_3-7R_1 \to R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_3-2R_2 \to R_3 \\ \frac{R_2}{-3} \to R_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) R_1-2R_2 \to R_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

x, y - קשורים

z - חופשי

אינסוף פתרונות: $x = z \ , \ y = -2z$

פתרון כללי: $(z, -2z, z)$

4

דף 1

שיעורי בית: כל מה
שנשאר!

5.הפתרון הכללי של מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+x_4-2x_5=7 \\ 2x_1+5x_2-6x_3+2x_4+7x_5=50 \\ -5x_1-4x_2+15x_3-5x_4+9x_5=-15 \end{cases}$$

6.הפתרון הכללי של מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=30 \\ 4x_1+3x_2+2x_3+x_4=20 \\ x_1-x_2+x_3-x_4=-2 \\ x_1+3x_2+x_3+3x_4=22 \end{cases}$$

7.הפתרון הכללי של מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4=1 \\ 2x_1+4x_2+2x_3-3x_4=1 \\ 3x_1+6x_2+5x_3-4x_4=1 \end{cases}$$

8.הבט במערכת הבאה ופתור

$$\left\{\begin{matrix} x+y+2z=5 \\ 2x+3y+5z=11 \\ 3x+4y+5z=12 \end{matrix}\right\}$$

9. הבט במערכת הבאה :

$$\left\{\begin{matrix} x-y+z=4 \\ 2x-3y+z=1 \\ 4x-5y+3z=9 \end{matrix}\right\}$$

2 - 13

10. הבט במערכת הבאה ופתר

$$\begin{cases} x-y+z=3 \\ 3x-4y+5z=11 \\ 5x-6y+7z=17 \end{cases}$$

11.הבט במערכת הבאה ופתור

$$\begin{cases} x+y+2z=4 \\ 2x+3y+5z=10 \\ 3x+4y+5z=12 \end{cases}$$

12. הבט במערכת הבאה ופתר :

$$\begin{cases} x-y+z=4 \\ 2x-3y+z=-1 \\ 4x-5y+3z=7 \end{cases}$$

13. הבט במערכת הבאה ופתר

$$\begin{cases} x-y+z=3 \\ 3x-4y+5z=10 \\ 5x-6y+7z=16 \end{cases}$$

דף 3

18. הבט במערכת הבאה ופתור

$$\begin{Bmatrix} x+3y+4z=8 \\ 3x+6y+3z=12 \\ 6x+15y+15z=34 \end{Bmatrix}$$

תשובות 1. $t,s\in\Re \quad (-t+2,-s-2,t,s)$

2. $t,s\in\Re \quad (s+t-1,4-2s-3t,s,t)$

3. $t,s\in\Re \quad (2s-3t+4,s,t-3,t)$

4. $t,s\in\Re \quad (-\frac{2}{3}s-\frac{1}{3}t-\frac{7}{3},s,t,4)$

5. $t,s\in\Re \quad (-t-s+\frac{349}{67},\frac{256}{67},t,s,\frac{196}{67})$

6. $t\in\Re \quad (t-3,-t+6,-t+7,t)$

7. $t\in\Re \quad (-2t-1,t,0,-1)$

8. $(2,-1,2)$

9. $t\in\Re \quad (-2t+11,-t+7,t)$

10. $t\in\Re \quad (t+1,2t-2,t)$

11. $(1,1,1)$

12. $t\in\Re \quad (-2t+13,-t+2,t)$

13. $t\in\Re \quad (2t-1,t+2,t)$

14. $t\in\Re \quad (3t-1,-3t+5,t)$

15. $(2,2,1)$

16. $(2,2,3)$

17. $t\in\Re \quad (5t-4,-3t+4,t)$

18. אין פתרון

פל 4

תרגיל 1

1 הצג בצורה וקטורית את פתרון המערכת:

$$\begin{cases} x & +y & +z & +w & =0 \\ x & -y & +z & -w & =4 \\ 4x & +2y & +4z & +2w & =4 \\ 5x & +3y & +5z & +3w & =4 \end{cases}$$

2. הפתרון הכללי של מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5 \\ 6x_1+7x_2+8x_3+9x_4=10 \\ 11x_1+17x_2+23x_3+29x_4=35 \end{cases}$$

3. הפתרון הכללי של מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+2x_4=1 \\ 2x_1-4x_2+x_3+5x_4=5 \\ 3x_1-6x_2+2x_3+7x_4=6 \\ 7x_1-14x_2+5x_3+16x_4=13 \end{cases}$$

4. הפתרון הכללי של מערכת המשוואות

$$\begin{cases} 6x_1+4x_2+5x_3+2x_4=6 \\ 3x_1+2x_2+4x_3+x_4=9 \\ 3x_1+2x_2-2x_3+x_4=-15 \\ 9x_1+6x_2+9x_3+3x_4=15 \end{cases}$$

דף 5

14. הבט במערכת הבאה ופתור

$$\left\{\begin{array}{c} x+2y+3z=9 \\ 3x+7y+12z=32 \\ 6x+14y+24z=64 \end{array}\right\}$$

15. הבט במערכת הבאה ופתור

$$\left\{\begin{array}{c} x+2y+3z=9 \\ 3x+7y+12z=32 \\ 6x+14y+23z=63 \end{array}\right\}$$

16. הבט במערכת הבאה ופתור

$$\left\{\begin{array}{c} x+2y+3z=15 \\ 3x+7y+12z=56 \\ 6x+14y+z=43 \end{array}\right\}$$

17. הבט במערכת הבאה

$$\left\{\begin{array}{c} x+3y+4z=8 \\ 3x+6y+3z=12 \\ 6x+15y+15z=36 \end{array}\right\}$$

לינארית - תרגול 3

מערכת משוואות עם פרמטר

1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & 1 & a \\ a & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 2 & 1 & a & 1 \\ a & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2-2R_1 \to R_2 \\ R_3-aR_1 \to R_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & -3 & a-2 & 1-2a \\ 0 & 1-2a & 2-a & 1-a^2 \end{array}\right) \xrightarrow{3R_3+(1-2a)R_2 \to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & -3 & a-2 & 1-2a \\ 0 & 0 & 3(2-a)+(1-2a)(a-2) & 3(1-a^2)+(1-2a)^2 \end{array}\right)$$

כאשר איברים על אלכסון בצורה מדורגת שונים מ-0 יש פתרון יחיד. לכן $3(2-a)+(1-2a)(a-2)\neq 0$ יש פתרון יחיד.

$$3(2-a)+(1-2a)(a-2)\neq 0$$

$$6-3a+a-2-2a^2+4a\neq 0$$

$$-2a^2+2a+4\neq 0 \quad /\div 2$$

$$a^2-a-2\neq 0$$

$$a_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}= \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

כאשר $a\neq -1,2$ פתרון יחיד.

$a=-1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right)$$

שורת סתירה

אין פתרון.

$a=2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

אינסוף פתרונות.

לסיכום:

$a\neq -1,2$ פתרון יחיד

$a=-1$ אין פתרון

$a=2$ אינסוף פתרונות.

1

4

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2+a & 4+a \\ 3 & a & 3 & 7-a \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2-2R_1\to R_2 \\ R_3-3R_1\to R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & a & a-4 \\ 0 & a-3 & 0 & -a-5 \end{array}\right)$$

$$3R_3+(a-3)R_2\to R_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & a & a-4 \\ 0 & 0 & a(a-3) & 3(-a-5)+(a-3)(a-4) \end{array}\right)$$

פתרון יחיד כאשר: $a(a-3)\neq 0$

$a^2-3a\neq 0$

$a\neq 0,3$ פתרון יחיד.

$a=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

שורת סתירה!
אין פתרון.

$a=3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -24 \end{array}\right)$$

שורת סתירה
אין פתרון.

בסיכום:

$a\neq 0,3$ פתרון יחיד

$a=0$ אין פתרון

$a=3$ אין פתרון

אין a עבורו יש אינסוף פתרונות

2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 2 & a & 4 & a \\ 3 & 1 & a & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2-2R_1\to R_2 \\ R_3-3R_1\to R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-2 & 4-2a & a-2 \\ 0 & -2 & -2a & -2 \end{array}\right)$$

$$R_2 \leftrightarrow \frac{R_3}{-2} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-2 & 4-2a & a-2 \end{array}\right) \quad R_3-(a-2)R_2\to R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 4-2a-a(a-2) & 0 \end{array}\right)$$

פתרון יחיד $4-2a-a(a-2)\neq 0$

$4-2a-a^2+2a\neq 0$

$-a^2+4\neq 0$

$a^2\neq 4$

$a\neq\pm 2$ פתרון יחיד.

$a=2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \text{ אינסוף פתרונות.}$$

$a=-2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \text{ אינסוף פתרונות}$$

סיכום:

$a\neq\pm 2$ פתרון יחיד

$a=2$ אינסוף פתרונות

$a=-2$ אינסוף פתרונות

אין a עבור אין פתרון.

3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} b & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{array}\right) R_1\leftrightarrow R_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 3 \\ b & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2-bR_1\to R_2 \\ R_3-R_1\to R_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 3 \\ 0 & 1-b^2 & 1-b & 4-3b \\ 0 & b & 0 & 1 \end{array}\right) R_2\leftrightarrow R_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 3 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 1-b^2 & 1-b & 4-3b \end{array}\right)$$

.3

רוצים לחלק ב-b אז בודקים מה קורה כאשר b=0:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

שורת סתירה
אין פתרון.

נניח $b \neq 0$

$\frac{R_2}{b} \to R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{b} \\ 0 & 1-b^2 & 1-b & 4-3b \end{array}\right) \quad R_3-(1-b^2)R_2 \to R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{b} \\ 0 & 0 & 1-b & 4-3b-\frac{1-b^2}{b} \end{array}\right)$$

$b \neq 0$ יש
$1-b \neq 0$ פתרון
יחיד

$b \neq 0,1$ יש פתרון יחיד.

$b=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

שורת סתירה
אין פתרון.

לסיכום:

$b \neq 0,1$ פתרון יחיד

$b=0$ אין פתרון

$b=1$ אין פתרון

אין b עבורו יש אינסוף פתרונות.

8.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} b & 1 & 1 & b \\ 1 & b & 1 & b \\ 1 & 1 & b & b \end{array}\right) \quad R_2 \leftrightarrow R_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & b \\ b & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & b & b \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} R_2-bR_1 \to R_2 \\ R_3-R_1 \to R_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & b \\ 0 & 1-b^2 & 1-b & b-b^2 \\ 0 & 1-b & b-1 & 0 \end{array}\right) \quad R_2 \leftrightarrow R_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & b \\ 0 & 1-b & b-1 & 0 \\ 0 & 1-b^2 & 1-b & b-b^2 \end{array}\right)$$

$b=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

אינסוף
פתרונות.

נניח $b \neq 1$

$\frac{R_2}{1-b} \to R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & b \\ 0 & 1 & \frac{b-1}{1-b} & 0 \\ 0 & 1-b^2 & 1-b & b-b^2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-(1-b^2)R_2 \to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & b \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-b+1-b^2 & b-b^2 \end{array}\right)$$

$b\neq 1$ וגם $1-b+1-b^2\neq 0$ פתרון יחיד.

$$-b^2-b+2\neq 0$$

$$b=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{-2}= \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

$b\neq -2,1$ פתרון יחיד.

$b=-2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

שורת סתירה
אין פתרון.

סיכום:

$b\neq -2,1$ פתרון אחד.

$b=1$ אינסוף פתרונות

$b=-2$ אין פתרון.

5

תרגיל 2

1.נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} 2x+y+az=1 \\ x+2y+z=a \\ ax+y+2z=1 \end{cases}$$

כאשר a הוא פרמטר ממשי.

א. עבור איזה ערכים של a יש למערכת פתרון יחיד ?

ב. עבור איזה ערכים של a למערכת אין שום פתרון ?

ג. עבור איזה ערכים של a למערכת יש אינסוף פתרונות ?

2.נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x+y+az=1 \\ 2x+ay+4z=a \\ 3x+y+az=1 \end{cases}$$

כאשר a הוא פרמטר ממשי.

א. עבור איזה ערכים של a יש למערכת פתרון יחיד ?

ב. עבור איזה ערכים של a למערכת אין שום פתרון ?

ג. עבור איזה ערכים של a למערכת יש אינסוף פתרונות ?

3. נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} bx+y+z=4 \\ x+by+z=3 \\ x+2by+z=4 \end{cases}$$

כאשר b הוא פרמטר ממשי.

א. עבור איזה ערכים של b יש למערכת פתרון יחיד ?

ב. עבור איזה ערכים של b למערכת אין שום פיתרון ?

ג. עבור איזה ערכים של b למערכת יש אינסוף פתרונות ?

4. נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ 2x-y+(2+a)z=4+a \\ 3x+ay+3z=7-a \end{cases}$$

כאשר a הוא פרמטר ממשי.

א. עבור איזה ערכים של a יש למערכת פתרון יחיד ?

ב. עבור איזה ערכים של a למערכת אין שום פיתרון ?

ג. עבור איזה ערכים של a למערכת יש אינסוף פתרונות ?

5. עבור אילו ערכים של פרמטר ממשי a למערכת

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + (2+a)x_3 = 3+a \\ 3x_1 + ax_2 + 3x_3 = 6+a \end{cases}$$

יש פתרון יחיד ? אין פתרון ? יש אין-סוף פתרונות ?

6. נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x + ay + 6z = a \\ x + 2y + 3az = 2 \\ x + 3y + 2az = 4 \end{cases}$$

כאשר a הוא פרמטר ממשי.

א. עבור איזה ערכים של a יש למערכת פתרון יחיד ?

ב. עבור איזה ערכים של a למערכת אין שום פתרון ?

ג. עבור איזה ערכים של a למערכת יש אינסוף פתרונות ?

7. מצא עבור אילו ערכים של הפרמטר k יש למערכת הבאה אינסוף פתרונות , פתרון יחיד ואין פתרון .

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + (k-2)x_3 = 1 \\ kx_1 - kx_3 = 0 \end{cases}$$

8. נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} bx + y + z = b \\ x + by + z = b \\ x + y + bz = b \end{cases}$$

כאשר b הוא פרמטר ממשי.

א. עבור איזה ערכים של b יש למערכת פתרון יחיד ?

ב. עבור איזה ערכים של b למערכת אין שום פיתרון ?

ג. עבור איזה ערכים של b למערכת יש אינסוף פתרונות ?

9. נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+by-3z=b \\ 2x+3y+bz=3 \end{cases}$$

כאשר b הוא פרמטר ממשי.

א. עבור איזה ערכים של b יש למערכת פתרון יחיד ?

ב. עבור איזה ערכים של b למערכת אין שום פיתרון ?

ג. עבור איזה ערכים של b למערכת יש אינסוף פתרונות ?

10.

נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} ax+2y+z=a \\ 2x+y+2z=-1 \\ x+2y+az=1 \end{cases}$$

כאשר a הוא פרמטר ממשי.

א. עבור איזה ערכים של a יש למערכת פתרון יחיד ?

ב. עבור איזה ערכים של a למערכת אין שום פתרון ?

ג. עבור איזה ערכים של a למערכת יש אינסוף פתרונות ?

11

נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} ax+y+z=1 \\ 4x+ay+2z=a \\ ax+y+3z=1 \end{cases}$$

כאשר a הוא פרמטר ממשי.

א. עבור איזה ערכים של a יש למערכת פתרון יחיד ?

ב. עבור איזה ערכים של a למערכת אין שום פתרון ?

ג. עבור איזה ערכים של a למערכת יש אינסוף פתרונות ?

12. נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} -x+y+2z=7 \\ ax+2y+z=8 \\ y+az=5 \end{cases}$$

כאשר a הוא פרמטר ממשי.

א. עבור איזה ערכים של a יש למערכת פתרון יחיד ?

ב. עבור איזה ערכים של a למערכת אין שום פתרון ?

ג. עבור איזה ערכים של a למערכת יש אינסוף פתרונות ?

13. נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+by-3z=2 \\ 2x+3y+bz=3 \end{cases}$$

כאשר b הוא פרמטר ממשי.

א. עבור איזה ערכים של b יש למערכת פתרון יחיד ?

ב. עבור איזה ערכים של b למערכת אין שום פיתרון ?

ג. עבור איזה ערכים של b למערכת יש אינסוף פתרונות ?

14. נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} ay+z=0 \\ -x+ay+z=-a \\ x+a^2y+z=a^3 \end{cases}$$

כאשר a הוא פרמטר ממשי.

א. עבור איזה ערכים של a יש למערכת פתרון יחיד ?

ב. עבור איזה ערכים של a למערכת אין שום פתרון ?

ג. עבור איזה ערכים של a למערכת יש אינסוף פתרונות ?

15. נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x+y+az=a \\ ax+ay+z=1 \\ x+ay+az=2 \end{cases}$$

כאשר a הוא פרמטר ממשי.

א. עבור איזה ערכים של a יש למערכת פתרון יחיד ?

ב. עבור איזה ערכים של a למערכת אין שום פתרון ?

ג. עבור איזה ערכים של a למערכת יש אינסוף פתרונות ?

16. נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} ay+z=0 \\ -x+ay+z=-a \\ x+a^2y+z=a^3 \end{cases}$$

כאשר a הוא פרמטר ממשי.

א. עבור איזה ערכים של a יש למערכת פתרון יחיד ?

ב. עבור איזה ערכים של a למערכת אין שום פתרון ?

ג. עבור איזה ערכים של a למערכת יש אינסוף פתרונות ?

17.נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} -x+y+2z=7 \\ ax+2y+z=8 \\ y+az=5 \end{cases}$$

כאשר a הוא פרמטר ממשי.

א. עבור איזה ערכים של a יש למערכת פתרון יחיד ?

ב. עבור איזה ערכים של a למערכת אין שום פתרון ?

ג. עבור איזה ערכים של a למערכת יש אינסוף פתרונות ?

18.נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x+y+az=-1 \\ 3x+(a+1)y+(a-1)z=-1 \\ ax+2y+z=0 \end{cases}$$

כאשר a הוא פרמטר ממשי.

א. עבור איזה ערכים של a יש למערכת פתרון יחיד ?

ב. עבור איזה ערכים של a למערכת אין שום פתרון ?

ג. עבור איזה ערכים של a למערכת יש אינסוף פתרונות ?

19. נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} ax+y+z=1 \\ 4x+ay+2z=a \\ ax+y+3z=1 \end{cases}$$

כאשר a הוא פרמטר ממשי.

א. עבור איזה ערכים של a יש למערכת פתרון יחיד ?

ב. עבור איזה ערכים של a למערכת אין שום פיתרון ?

ג. עבור איזה ערכים של a למערכת יש אינסוף פתרונות ?

20.נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x+ay+z=0 \\ ax+y+az=0 \\ (a+1)x-y+z=1 \end{cases}$$

כאשר a הוא פרמטר ממשי.

א. עבור איזה ערכים של a יש למערכת פתרון יחיד ?

ב. עבור איזה ערכים של a למערכת אין שום פתרון ?

ג. עבור איזה ערכים של a למערכת יש אינסוף פתרונות ?

21.נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x+ay+2z=1 \\ x+(2a-1)y+3z=1 \\ ax-y-z=2a-1 \end{cases}$$

כאשר a הוא פרמטר ממשי.

א. עבור איזה ערכים של a יש למערכת פתרון יחיד ?

ב. עבור איזה ערכים של a למערכת אין שום פתרון ?

ג. עבור איזה ערכים של a למערכת יש אינסוף פתרונות ?

22.נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ 2x-y+(2+a)z=4+a \\ 3x+ay+3z=8-a \end{cases}$$

כאשר a הוא פרמטר ממשי.

א. עבור איזה ערכים של a יש למערכת פתרון יחיד ?

ב. עבור איזה ערכים של a למערכת אין שום פתרון ?

ג. עבור איזה ערכים של a למערכת יש אינסוף פתרונות ?

23.נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} 2x+y+az=1 \\ x+2y+z=a \\ ax+y+2z=1 \end{cases}$$

כאשר a הוא פרמטר ממשי.

א. עבור איזה ערכים של a למערכת יש פתרון יחיד ?

ב. עבור איזה ערכים של a אין למערכת אף פתרון ?

ג. עבור איזה ערכים של a למערכת יש אינסוף פתרונות ?

לינארית - תרגול 4

סימונים:

$$B=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & 5 & 4\end{pmatrix}_{2\times 3} \qquad A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 4 & 7\\ -3 & 0\end{pmatrix}_{3\times 2}$$

מספר שורות, מספר עמודות

חיבור:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 4 & 7\\ -3 & 0\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -5 & 0\\ 7 & -9\end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 4 & 7\\ -3 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -5 & 0\\ 7 & -9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+(-3) & -2+4\\ 4+(-5) & 7+0\\ -3+7 & 0+(-9)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -1 & 7\\ 4 & -9\end{pmatrix}$$

כפל בסקלר (מספר):

$$2\begin{pmatrix}1 & 4\\ -7 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 1 & 2\cdot 4\\ (-7)\cdot 2 & 2\cdot 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 8\\ -14 & 16\end{pmatrix}$$

1

$$A+B=\begin{pmatrix}6 & 2\\ 7 & -3\\ -8 & 5\end{pmatrix}$$

$A+C=$ לא אפשרי

$$-2A=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ -2 & 6\\ 10 & -8\end{pmatrix}$$

$$-A+3B=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ -1 & 3\\ 5 & -4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}12 & 6\\ 18 & 0\\ -9 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 6\\ 17 & 3\\ -4 & -1\end{pmatrix}$$

1.

.3

$$A-2D=B \qquad B-A=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ -4 & 8 & -2 \\ -6 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$-2D=B-A$$

$$D=\frac{B-A}{-2}$$

$$\frac{B-A}{-2}=\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}=D$$

$$\begin{pmatrix} x+2y=z+1 & 2y+2y=x-3 \\ 0+2x=5-3y & 3z+(-x+7y)=-8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x+2y=z+1 & 4y=x-3= \\ 2x=5-3y & 3z+x-7y=-8 \end{pmatrix} \quad 4y+3=x$$

$$2(4y+3)=5-3y$$

$$8y+6=5-3y$$

$$11y+6=5$$

$$11y=-1$$

$$x+2y-z=1 \leftarrow x+2y=z+1$$

$$-x+2y+3z=-3 \leftarrow 2y+3z=x-3$$

$$2x+3y=5 \leftarrow 2x=5-3y$$

$$-x+7y+3z=-8 \leftarrow -x+7y+3z=-8$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \\ -1 & 7 & 3 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2+R_1\to R_2 \\ R_3-2R_1\to R_3 \\ R_4+R_1\to R_4 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & 2 & -7 \end{array}\right) \; R_2\leftrightarrow(-1)R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 9 & 2 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1-2R_2\to R_1 \\ R_3-4R_2\to R_3 \\ R_4-9R_2\to R_4 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 20 & 20 \end{array}\right) \; \frac{R_3}{10}\to R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 20 & 20 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1-3R_3\to R_1 \\ R_2+2R_3\to R_2 \\ R_4-20R_3\to R_4 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

פתרון יחיד:

$x=4$

$y=-1$

$z=1$

2

כפל מטריצות:

$$A_{n\times k}\cdot B_{k\times m}=C_{n\times m}$$

כדי שנוכל להכפיל $A\cdot B$ צריך שמספר העמודות של A יהיה שווה למספר השורות של B.

<u>דוגמא:</u>

$$B=\begin{pmatrix}-4&0&5\\3&-2&6\end{pmatrix}_{2\times3}\qquad A=\begin{pmatrix}1&-2\\4&-3\\7&0\end{pmatrix}_{3\times2}$$

$$A_{3\times2}\cdot B_{2\times3}=\begin{pmatrix}1&-2\\4&-3\\7&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4&0&5\\3&-2&6\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot(-4)+(-2)\cdot3 & 1\cdot0+(-2)\cdot(-2) & 1\cdot5+(-2)\cdot6\\ 4\cdot(-4)+(-3)\cdot3 & 4\cdot0+(-3)\cdot(-2) & 4\cdot5+(-3)\cdot6\\ 7\cdot(-4)+0\cdot3 & 7\cdot0+0\cdot(-2) & 7\cdot5+7\cdot6\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-10&4&-7\\-25&6&2\\-28&0&35\end{pmatrix}\qquad B\cdot A=\begin{pmatrix}-4&0&5\\3&-2&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-2\\4&-3\\7&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(-4)+0+35 & 8+0+0\\ 3+(-8)+42 & (-6)+6+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}31&8\\37&0\end{pmatrix}$$

כפל 2:

6. נתון $A=\begin{pmatrix}2&-1\\3&1\end{pmatrix}$ צריך למצוא $B_{n\times m}$ כך ש-

$$\underset{2\times2}{A}\cdot\underset{n\times m}{B}=\underset{n\times m}{B}\cdot\underset{2\times2}{A}$$

$$n=2\qquad m=2$$

לכן $B_{2\times2}=\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}2&-1\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\3&1\end{pmatrix}$$

.3

$$\begin{pmatrix} 2x-z & 2y-w \\ 3x+z & 3y+w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y & -x+y \\ 2z+3w & -z+w \end{pmatrix}$$

$$\text{II}\quad 3y+z=0 \leftarrow 2x-z=2x+3y$$
$$\text{I}\quad x+y-w=0 \leftarrow 2y-w=-x+y$$
$$\text{III}\quad 3x-z-3w=0 \leftarrow 3x+z=2z+3w$$
$$\text{IV}\quad 3y+z=0 \leftarrow 3y+w=-z+w$$

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & y \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-3R_1\to R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{R_2}{3}\to R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1-R_2\to R_1 \\ R_3+3R_2\to R_3 \\ R_4-3R_2\to R_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

$x=w+\frac{1}{3}z \leftarrow x-\frac{1}{3}z-w=0$ קשורים x, y

$y=-\frac{1}{3}z \leftarrow y+\frac{1}{3}z=0$ חופשיים z, w

$$B=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w+\frac{1}{3}z & -\frac{1}{3}z \\ z & w \end{pmatrix}$$

ב.

$$w=2 \;,\; z=6 \leftarrow B=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$x=w+\frac{1}{3}z=2+\frac{1}{3}\cdot 6=4$$
$$y=-\frac{1}{3}z=-\frac{1}{3}\cdot 6=-2$$

B מתחלפת עם A.

4

מטריצה משוחלפת:

(נגון:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ 5 & 0 & -6\end{pmatrix} \qquad A^T=\begin{pmatrix}1 & 5\\ -3 & 0\\ 4 & -6\end{pmatrix}$$

דף 3:

3

$$\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}}\underset{n\times m}{X}-\left(\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}}\underset{n\times m}{X}\right)^T=\underbrace{\underset{2\times m}{X}-\underset{m\times 2}{X^T}}_{m=2}$$

$n=2$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}-\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}\right]^T=\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}^T$$

$$=\begin{pmatrix}z & w\\ -x & -y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}z & w\\ -x & -y\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x & z\\ y & w\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}z & w\\ -x & -y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}z & -x\\ w & -y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x & z\\ y & w\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & w+x\\ -x-w & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & y-z\\ z-y & 0\end{pmatrix}$$

$x-y+z+w=0 \leftarrow w+x=y-z$

$-x+y-z-w=0 \leftarrow -x-w=z-y$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & -1 & -1 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{R_2+R_1\to R_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

x קשור

y,z,w חופשיים

$x-y+z+w=0$

$x=y-z-w$

$$X=\begin{pmatrix}y-z-w & y\\ z & w\end{pmatrix}$$

.5

בל ג

4.9 תרגילים

1. נתונות המטריצות:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ו-} \quad C=\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

חשב את הביטויים הבאים: $A+B$, $A+C$, $-2A$, $-A+3B$

2. נתונות המטריצות:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ו-} \quad C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

חשב את הביטויים הבאים: $A-(B+C)$, $A-B-C$ ו- $2A-3B+C$

3. נתונות המטריצות:

$$A=\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 7 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ו-} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 5 \\ -5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

מצא מטריצה D עבורה מתקיים $A-2D=B$.

4. מצא את ערכי x, y ו- z עבורם מתקיים:

$$\begin{pmatrix} x & 2y \\ 0 & 3z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2y & 3z \\ 2x & -x+7y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z+1 & x-3 \\ 5-3y & -8 \end{pmatrix}$$

5. נתונות המטריצות הבאות:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ו-} \quad E=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

310

בלג

א. חשב את המכפלות AB ו- BA.

ב. חשב את המכפלות AC ו- CA. האם הן שוות ?

ג. (i) חשב את המכפלות DE ו- ED. האם הן שוות ?

(ii) מגדירים עבור מטריצה A כלשהי, $A^2 = AA$

חשב את הביטויים $(D-E)^2$ ו- $D^2-2DE+E^2$. האם הם שווים ? נמק !

6. נתונה המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

א. מצא את כל המטריצות B אשר מתחלפות עם A (כלומר $AB = BA$).

ב. על סמך א. האם המטריצה $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ מתחלפת עם A ?

7. מצא מטריצה D המקיימת :

$$D\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

8. רשום את המערכות הבאות בכתיב מטריציאלי:

דף 1.

15. נתונות המטריצות:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{ו-} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

חשב את המטריצות הבאות:

A^t, B^t, $A+A^t$, AA^t, A^tA, A^tB, BA^t, AB^t, $(AB)^t$, B^tA^t, A^tB^t

16. נתונות המטריצות:

$$C = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{ו-} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

חשב את המטריצות הבאות: C^t, D^t, CD, C^tD^t, DC, D^tC^t

17. א. נתונות המטריצות:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ו-} \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

חשב את המטריצות הבאות: $(ABC)^t$, $C^tB^tA^t$ ו- $A^tB^tC^t$

ב. אם A, B ו- C מטריצות מגודל nxn האם $(ABC)^t = A^tB^tC^t$? נמק.

18. נתונות המטריצות:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{ו-} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

בדוק אלו מהמטריצות הבאות סימטריות ?

3 דף

תרגיל מטריצות

1. פתור את המשואה $X\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ ע"י שימוש במטריצה הפוכה

2. תהיינה A,B שתי מטריצות הפיכות מאותו הסדר. הוכח
א. A,B מתחלפות אם ורק אם A^{-1},B^{-1} מתחלפות.
ב. A,B מתחלפות אם ורק אם $(AB)^2=A^2B^2$.

3. מצא את כל המטריצות X המקיימות את השוויון
$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}X-\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}X\right)^T=X-X^T$$

4. תהינה A,B מטריצות הפיכות מסדר n. הוכח ש $AB=BA \Leftrightarrow A^{-1}B=BA^{-1}$.

5. מצא את כל המטריצות X המקיימות את השוויון
$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}X+\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}X\right)^T=X+X^T$$

6. הוכח שאם מטריצה $A\in M_n(\mathbf{R})$ מקיימת $A+A^{-1}=2I_n$ אז לכל מספר שלם k מתקיים $A^k+A^{-k}=2I_n$. תן דוגמא של מטריצה ריבועית מסדר 2 שמקיימת $A+A^{-1}=2I_2$.

7. מצא את כל המטריצות X המקיימות את המשוואה
$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}X-X\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

8. נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\\ -2 & -2 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. חשב את A^{-1} ובאמצעותה מצא את X מהמשוואה $XA=B$ כאשר $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}$.

9. הוכח או הפרך:

א. מטריצה ריבועית A מסדר $n\geq 2$ המוגדרת ע"י הנוסחה $A_{ij}=i\cdot j$ הפיכה (כאן i,j הם האינדקסים שמשתנים מ-1 עד n).

10. פטור את המשוואה $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=X\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ ע"י שימוש במטריצה הפוכה

11. הוכח באינדוקציה את השוויון $\begin{pmatrix}1 & k & \frac{k(k-1)}{2}\\ 0 & 1 & k\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^k$ מתקיים לכל k טבעי.

ב. אם A,B שתי מטריצות הפיכות, אז $A^{-1}B=BA^{-1}\Leftrightarrow AB=BA$.

12. הוכח באינדוקציה ש- $A^{2n+1}=4^nA$ לכל מספר שלם $n\geq 0$, כאשר

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

13. מצא את כל המטריצות X המקיימות את המשוואה

$$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}X=X\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

14. נתונה מטריצה רבועית nxn . נסמן $A\bullet A=A^2,\ A\bullet A^2=A^3,\ A\bullet A^k=A^{k+1}$
נתון כי $A^2=3A-2I_n$.

א. בטא את A^3 על ידי A ו- I_n בלבד.

ב. הוכח באינדוקציה על k כי מתקים לכל k כי :
$A^k=(2^k-1)A-(2^k-2)I_n$.

15. נתונה מטריצה רבועית nxn . נסמן $A\bullet A=A^2,\ A\bullet A^2=A^3,\ A\bullet A^k=A^{k+1}$
נתון כי $A^2=4A-3I_n$.

א. בטא את A^3 על ידי A ו- I_n בלבד.

ב. הוכח באינדוקציה על k כי מתקים לכל k כי :
$A^k=0.5[(3^k-1)A-(3^k-3)I_n]$

16. מצא את X מהמשוואה $\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}X=-X\begin{pmatrix}-1&2&0\\0&-1&3\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

17. הוכח באינדוקציה את השוויון $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}2^{k-1}&0&2^{k-1}\\0&1&0\\2^{k-1}&0&2^{k-1}\end{pmatrix}$ מתקיים לכל k טבעי.

18. מצא את כל המטריצות X המקיימות את השוויון

$$\left(\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}X\right)^T=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}X^T$$

* 19. נתונות מטריצות הפיכות $A,B\in M_n(\mathbf{R})$. הוכח ש- $A+B$ הפיכה אם רק אם $A^{-1}+B^{-1}$ הפיכה.

20. הוכח שאם מטריצה ממשית A מסדר 3x3 מקיימת $AA^T=0$ אזי $A=0$.

21. הפוך את המטריצה הממשית
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

22. הוכח שלכל שלוש מטריצות ריבועית A,B,C מסדר n מתקיים:
$A(B+C)=AB+AC$.

23. מצא את כל המטריצות X המקיימות את השוויון
$$X\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}X^T$$

24. הפוך את המטריצה הממשית מסדר n:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \dots & -n & 1 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & -n & . & 1 & 1 \\ -n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

25. נתונות מטריצות הפיכות $A,B \in M_n(\mathbf{R})$. הוכח ש- A,B מתחלפות אם ורק אם A^{-1},B^{-1} מתחלפות.

26. הוכח שמטריצה ממשית $A=\begin{pmatrix} x & y & a & b \\ z & w & c & d \\ r & s & 0 & 0 \\ t & u & 0 & 0 \end{pmatrix}$ הפיכה אם ורק אם המטריצות $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$ הפיכות.

$R_1 \to R_n$
$R_2 \leftrightarrow R_{n-1}$
R_2+R_1
R_3+R_1

$R_1+R_2 \cdots R_n \to R_1$
$-n+n-1$

27. תהיינה $A=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\\a_5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\\b_5\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\\c_5\end{pmatrix}$ מטריצות-עמודה. הוכח שממ"ל $(AB^T)X=C$ פתירה אם ורק אם עמודות A ו C פרופורציונאליות.

28. הוכח שלכל שתי מטריצות ריבועית A,B מסדר n מתקיים: $(AB)^T=B^TA^T$.

29. הפוך את המטריצה הממשית $\begin{pmatrix}-1&1&1&\dots&1\\1&-1&1&\dots&1\\1&1&-1&\dots&1\\.&.&.&.&.\\1&1&1&\dots&-1\end{pmatrix}$ מסדר n ($n>2$).

30. הוכח שמטריצה הפיכה $A\in M_n(\mathbf{R})$. מקיימת $(I+A)^{-1}=I+A^{-1}$ אם רק אם $A^2+A+I=0$.

31. הוכח שאם $E\in M_n(R)$ מטריצות אלמנטאריות אז E^2 גם תהיה מטריצה אלמנטארית.

32. מצא את כל המטריצות X המקיימות את השוויון

$$\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&2&-1\\0&0&2\end{pmatrix}X-\left(\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}X^T\right)^T=X$$

33. מצא את כל המטריצות X המקיימות את השוויון

$$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}X-\left(\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}X\right)^T=X-X^T$$

לינארית - תרגול 5

מטריצה משוחלפת:

הגדרה: נתון $A = (a_{ij})_{n\times m}$

אזי $A^T = (a_{ji})$ משוחלפת

15 נתון

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$A + A^T =$ לא ניתן לחבר.

$$A\cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -10 \\ -10 & 17 \end{pmatrix}$$

$$A^T\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -2 \\ -3 & -2 & 25 \end{pmatrix}$$

$$A^T\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} =$$ לא ניתן

$$B\cdot A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -5 & 3 \\ -1 & 14 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -1 \\ -1 & 3 & 14 \end{pmatrix}$$

$$(A\cdot B)^T=\left[\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&1&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&-1&1\\4&2&3\end{pmatrix}\right]^T=\begin{pmatrix}-10&-9&-7\\16&7&13\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}-10&16\\-9&7\\-7&13\end{pmatrix}$$

תכונות של מטריצה משוחלפת.

1. נתון $A_{n\times m}$ $B_{n\times m}$ אז
$$(A+B)^T=A^T+B^T$$

2. נתון $A_{n\times m}$ אז $(A^T)^T=A$

3. נתון $A_{n\times k}$ ו- $B_{k\times m}$ אז $(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$

4. נתון $A_{n\times m}$ ו- K סקלר (מספר) אז
$$(KA)^T=K\cdot A^T$$

הגדרה: יהי $A_{n\times m}$ נקראת מטריצה סימטרית אם $A^T=A$

למשל:

$A=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$ $\qquad$ $A^T=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}=A$

לכן A סימטרית.

$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{pmatrix}$ $\qquad$ $A^T=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{pmatrix}=A$

לכן A סימטרית.

תרגיל:

נתון $A_{n\times n}$ ו- $B_{n\times n}$ מטריצות סימטריות.
הוכח או סתור ע"י דוגמא נגדית

1. $A+B$ סימטרי.
2. $A\cdot B$ סימטרי.

2

פתרון:

נתון A,B סימטריות $\Leftarrow$ $A^T=A$ וגם $B^T=B$

1. הוכח $A+B$ סימטרי

צריך להוכיח $(A+B)^T=A+B$

$$(A+B)^T \overset{\text{תכונה 1}}{=} A^T+B^T \underset{\text{נתון}}{=} A+B$$

2. צריך להוכיח $A\cdot B$ סימטרי

צריך להוכיח $(A\cdot B)^T=A\cdot B$

$$(A\cdot B)^T \underset{\text{תכונה 3}}{=} B^T\cdot A^T \underset{\text{נתון}}{=} B\cdot A \neq A\cdot B$$

ניתן דוגמא נגדית.

$A=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix} \leftarrow A^T=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix} \leftarrow$ A סימטרית

$B=\begin{pmatrix}1&4\\4&3\end{pmatrix} \leftarrow B^T=\begin{pmatrix}1&4\\4&3\end{pmatrix} \leftarrow$ B סימטרית

$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&4\\4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&10\\14&17\end{pmatrix}$ $A\cdot B$ לא סימטרי. $(A\cdot B)^T=\begin{pmatrix}9&14\\10&17\end{pmatrix}$

תרגיל:

נתון $A_{n\times n}$ ו- $B_{n\times n}$ מטריצות סימטריות.

הוכח $A\cdot B$ סימטרי $\Longleftrightarrow$ $AB=B\cdot A$

הוכחה: נתון A ו- B סימטריות

$(\Leftarrow:)$ $A^T=A$ וגם $B^T=B$

$(\Leftarrow:)$ נתון $A\cdot B$ סימטריות

צ"ל $A\cdot B=B\cdot A$

$A\cdot B$ סימטריות $\Leftarrow$ $(AB)^T=AB$

$$A\cdot B \underset{\text{נתון}}{=} (A\cdot B)^T \underset{\text{תכונה 3}}{=} B^T\cdot A^T \underset{\text{נתון}}{=} B\cdot A$$

$(\Longrightarrow:)$ נתון $AB=BA$

צ"ל $A\cdot B$ סימטרי.

צ"ל $(AB)^T=AB$ .3

$$(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T = B\cdot A = A\cdot B$$

תכונה 3 נתון נתון

דף של שבוע שעבר:

11 צ"ל

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix}1&k&\frac{k(k-1)}{2}\\0&1&k\\0&0&1\end{pmatrix}$$ לכל k טבעי

הוכחה: אינדוקציה על k

<u>שלב 1:</u> $k=1$

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix}1&1&\frac{1(1-1)}{2}\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

<u>שלב 2:</u> נניח נכונות עבור $k=m$

נתון:

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix}1&m&\frac{m(m-1)}{2}\\0&1&m\\0&0&1\end{pmatrix}$$

<u>שלב 3</u> צ"ל נכונות עבור $k=m+1$

צ"ל

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{m+1} = \begin{pmatrix}1&m+1&\frac{(m+1)m}{2}\\0&1&m+1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{m+1} = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^m$$

4

לפי נתון $= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & m & \frac{m(m-1)}{2} \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & m+1 & \frac{m(m-1)}{2}+m \\ 0 & 1 & m+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m+1 & \frac{m^2-m+2m}{2} \\ 0 & 1 & m+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & m+1 & \frac{m^2+m}{2} \\ 0 & 1 & m+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m+1 & \frac{m(m+1)}{2} \\ 0 & 1 & m+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

הגענו למה שרצינו להוכיח.

14. נתון: $A_{n\times n}$

$A^2=3A-2I_n$

תשובה: :)

א.

$$A^3=A^2\cdot A$$
$$=(3A-2I_n)\cdot A$$
$$=3A^2-2I_nA$$
$$=3(3A-2I_n)-2A$$
$$=9A-6I_n-2A$$
$$=7A-6I_n$$

ב. הוכח $A^k=(2^k-1)A-(2^k-2)I_n$

הוכחה באינדוקציה על k.

שלב 1: $k=1$

$$A^1=\underbrace{(2^1-1)\cdot A}_{1\cdot A}-\underbrace{(2^1-2)\cdot I_n}_{0\cdot I_n=0}=A=A$$

שלב 2: נניח נכונות עבור $k=m$

נתון $A^m=(2^m-1)A-(2^m-2)\cdot I_n$

שלב 3: צ"ל נכונות עבור $k=m+1$

$$A^{m+1}=(2^{m+1}-1)A-(2^{m+1}-2)\cdot I_n$$

5.

$$A^{m+1} = A\cdot A^m \underset{(א)}{=} A\cdot\left[(2^m-1)\cdot A-(2^m-2)\cdot I_n\right] =$$

$$= (2^m-1)A^2-(2^m-2)\cdot A \underset{(א)}{=} (2^m-1)(3A-2I_n)-(2^m-2)\cdot A =$$

$$= 3\cdot 2^m A - 3A - 2(2^m-1)I_n - 2^m A + 2A =$$

$$= (3\cdot 2^m - 3 - 2^m + 2)A - (2\cdot 2^m - 2)I_n$$

$$= (2\cdot 2^m - 1)A - (2^{m+1}-2)I_n$$

$$= (2^{m+1}-1)A-(2^{m+1}-2)I_n$$

הגענו
לצד
ימין

.20 (א) $A_{3\times3}$ $\quad A\cdot A^T=0$ אז $A=0$

נגדיר A:

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}$$

הוכחה:

$$A\cdot A^T=\begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & d & g\\ b & e & h\\ c & f & i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \boxed{a^2+b^2+c^2} & ad+be+cf & ag+bh+ci\\ ad+be+cf & \boxed{d^2+e^2+i^2} & dg+eh+fi\\ ga+hb+gc & ga+hd+ig & \boxed{g^2+h^2+i^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$a=0,\ b=0,\ c=0 \Leftarrow a^2+b^2+c^2=0$$

$$d=0,\ e=0,\ f=0 \Leftarrow d^2+e^2+f^2=0$$

$$g=0,\ h=0,\ i=0 \Leftarrow g^2+h^2+i^2=0$$

.6

95

שם: עמית עלון
ת.ז.: 200042398
תאריך: 8/11/2016

אלגברה לינארית א' - שיעורי בית

2.

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y+z=2 \\ x+y+z=6 \end{cases}$$

$R_2-R_1 \to R_2$
$R_3-R_1 \to R_3$

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ -2y+2z=2 \\ 2z=6 \end{cases}$$

$\frac{R_2}{-2} \to R_2$
$\frac{R_3}{2} \to R_3$

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ y-z=-2 \\ z=3 \end{cases}$$

$y-3=-2$

$y=1$ $\quad y=2$

$x+1-3=0$

$x=2$ $\quad x=1$

5

$$\begin{cases} x+y \quad =5 \\ x \quad +z=7 \\ y+z=8 \end{cases}$$

$R_2 \leftrightarrow R_3$

$$\begin{cases} x+y \quad =5 \\ y+z=8 \\ x \quad +z=7 \end{cases}$$

$R_3-R_1 \to R_3$

$$\begin{cases} x+y \quad =5 \\ y+z=8 \\ -y+z=2 \end{cases}$$

$R_3+R_2 \to R_3$

$$\begin{cases} x+y \quad =5 \\ y+z=8 \\ 2z=10 \end{cases}$$

1

$\frac{R_3}{2} \to R_3$ $\begin{cases} x+y = 5 \\ y+z=8 \\ z=5 \end{cases}$

$y+5=8$

$y=3$

$x+3=5$

$x=2$

$\begin{cases} 2x+y = 3 \\ x+y+z=0 \\ y+3z=-1 \end{cases}$ 8

$R_2 \leftrightarrow R_1$ $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y = 3 \\ y+3z=-1 \end{cases}$

$R_2-2R_1 \to R_2$ $\begin{cases} x+y+z=0 \\ -y-2z=3 \\ y+3z=-1 \end{cases}$

$-R_2 \to R_2$
$R_3-R_2 \to R_3$ $\begin{cases} x+y+z=0 \\ y+2z=-3 \\ z=2 \end{cases}$

$y+2(2)=-3$

$y+4=-3$

$y=-7$

$x-7+2=0$

$x-5=0$

$x=5$

2

11

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 6 \\ x + 2y + z = 12 \\ 3x \quad - 5z = 0 \end{cases}$$

$R_1 \leftrightarrow R_2$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 12 \\ 2x + y - 3z = 6 \\ 3x \quad - 5z = 0 \end{cases}$$

$R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2$

$R_3 - 3R_1 \rightarrow R_3$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 12 \\ -3y - 5z = -18 \\ -6y - 8z = -36 \end{cases}$$

$R_3 - 2R_2 \rightarrow R_3$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 12 \\ -3y - 5z = -18 \\ 2z = 0 \end{cases}$$

$\frac{R_3}{2} \rightarrow R_3$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 12 \\ -3y - 5z = -18 \\ z = 0 \end{cases}$$

$-3y - 5(0) = -18$

$-3y = -18$

$y = 6$

$x + 2(6) + (0) = 12$

$x + 12 = 12$

$x = 0$

3

14

$$\begin{cases} 2x + 4y + 3z = -5 \\ 3x + 3y + 2z = 0 \\ 5x + y + 3z = 1 \end{cases}$$

$R_2 - R_1 \to R_1$

$R_2 - 3R_1 \to R_2$

$R_3 - 5R_1 \to R_3$

$$\begin{cases} x - y - z = 5 \\ 6y + 5z = -15 \\ 6y + 8z = -24 \end{cases}$$

$R_3 - R_2 \to R_3$

$$\begin{cases} x - y - z = 5 \\ 6y + 5z = -15 \\ 3z = -9 \end{cases}$$

$\frac{R_3}{3} \to R_3$

$$\begin{cases} x - y - z = 5 \\ 6y + 5z = -15 \\ z = -3 \end{cases}$$

$$6y + 5(-3) = -15$$
$$6y = 0$$
$$y = 0$$
$$x - (0) - (-3) = 5$$
$$x + 3 = 5$$
$$x = 2$$

4

אלגברה לינארית - שיעורי בית 2:

שם: עמית לוזון

תאריך: 16/11/2016

ת.ז.: 200042398

100

3

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 5 \\ 3 & -6 & 2 & 7 & 6 \\ 7 & -14 & 5 & 16 & 13 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2-2R_1\to R_2 \\ R_3-3R_1\to R_3 \\ R_4-7R_1\to R_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \frac{R_2}{-1}\to R_2 \\ \frac{R_4}{-2}\to R_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_3+R_2\to R_3 \\ R_4-R_2\to R_4 \\ R_1-R_2\to R_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

משתנים קשורים: x_1, x_3

משתנים חופשיים: x_2, x_4

יש אינסוף פתרונות.

$x_1 = 4+2x_2-3x_4 \qquad x_3 = x_4-3$

פתרון כללי:

$$(4+2x_2-3x_4,\ x_2,\ x_4-3,\ x_4)$$

5

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & -2 & 7 \\ 2 & 5 & -6 & 2 & 7 & 50 \\ -5 & -4 & 15 & -5 & 9 & -15 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2-2R_1\to R_2 \\ R_3+5R_1\to R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 11 & 36 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & -1 & 20 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} R_1-2R_2\to R_1 \\ R_3-6R_2\to R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 & -24 & -65 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 11 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -67 & -196 \end{array}\right) \frac{R_3}{-67}\to R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 & -24 & -65 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 11 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-196}{-67} \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1+24R_3\to R_1 \\ R_2-11R_3\to R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & \frac{349}{67} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{256}{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{196}{67} \end{array}\right)$$

$x_1 = \frac{349}{67} + 3x_3 - x_4$

$x_2 = \frac{256}{67} \qquad x_5 = \frac{196}{67}$

משתנים קשורים: x_1, x_2, x_5

משתנים חופשיים: x_3, x_4

אינסוף פתרונות.

פתרון כללי:

$$\left(\frac{349}{67}+3x_3-x_4,\ \frac{256}{67},\ x_3,\ x_4,\ \frac{196}{67}\right)$$

1

.6

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 30 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 20 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 22 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2-4R_1 \to R_2 \\ R_3-R_1 \to R_3 \\ R_4-R_1 \to R_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 30 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -100 \\ 0 & -3 & -2 & -5 & -32 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -8 \end{array}\right) R_2 \leftrightarrow R_4$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 30 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -8 \\ 0 & -3 & -2 & -5 & -32 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -100 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1-2R_2 \to R_1 \\ R_3+3R_2 \to R_3 \\ R_4+5R_2 \to R_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & 6 & 46 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -8 & -8 & -56 \\ 0 & 0 & -20 & -20 & -140 \end{array}\right) \begin{array}{l} \frac{R_4}{-20} \to R_4 \\ \frac{R_3}{-8} \to R_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & 6 & 46 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_4-R_3 \to R_4 \\ R_2+2R_3 \to R_2 \\ R_1-7R_3 \to R_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

משתנים קשורים: x_1, x_2, x_3 $\quad X_1 = X_4 - 3 \quad X_2 = 6 - X_4 \quad X_3 = 7 - X_4$

משתנים חופשיים: X_4

אינסוף פתרונות. פתרון כללי: $(x_4-3,\ 6-x_4,\ 7-x_4,\ x_4)$

.7

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & -4 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2-2R_1 \to R_2 \\ R_3-3R_1 \to R_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & -2 \end{array}\right) R_3-R_2 \to R_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1+2R_3 \to R_1 \\ R_2-R_3 \to R_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \frac{R_2}{-4} \to R_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) R_1-3R_2 \to R_1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

משתנים קשורים: x_1, x_3, x_4 $\quad X_1 = -1-2X_2 \quad X_3 = 0 \quad X_4 = -1$

משתנים חופשיים: X_2 $\quad$ פתרון כללי:

אינסוף פתרונות. $\quad (-1-2x_2,\ x_2,\ 0,\ -1)$

2

12

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 4 & -5 & 3 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2-2R_1 \to R_2 \\ R_3-4R_1 \to R_4 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -9 \\ 0 & -1 & -1 & -9 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_3-R_2 \to R_3 \\ \frac{R_2}{-1} \to R_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) R_1+R_2 \to R_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 13 \\ 0 & 1 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

משתנים קשורים: x_1, x_2

משתנים חופשיים: x_3 $\quad x_1 = 13-2x_3 \quad x_2 = 9-x_3$

אינסוף פתרונות. פתרון כללי: $(13-2x_3, 9-x_3, x_3)$

13

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 5 & 10 \\ 5 & -6 & 7 & 16 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2-3R_1 \to R_2 \\ R_3-5R_1 \to R_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_3-R_2 \to R_3 \\ \frac{R_2}{-1} \to R_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) R_1+R_2 \to R_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

משתנים קשורים: x_1, x_2 $\quad x_1 = 2+x_3$

משתנים חופשיים: x_3 $\quad x_2 = 2x_3-1$

אינסוף פתרונות. פתרון כללי: $(2+x_3, 2x_3-1, x_3)$

14

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & 12 & 32 \\ 6 & 14 & 24 & 64 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2-3R_1 \to R_2 \\ R_3-6R_1 \to R_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_3-2R_2 \to R_3 \\ R_1-2R_2 \to R_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

משתנים קשורים: x_1, x_2 $\quad x_1 = 3x_3-1$

משתנים חופשיים: x_3 $\quad x_2 = 5-3x_3$

אינסוף פתרונות.

פתרון כללי: $(3x_3-1, 5-3x_3, x_3)$

3

15.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & 12 & 32 \\ 6 & 14 & 23 & 63 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2-3R_1 \to R_2 \\ R_3-6R_1 \to R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_3-2R_2 \to R_3 \\ R_1-2R_2 \to R_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \frac{R_3}{-1} \to R_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1+3R_3 \to R_1 \\ R_2-3R_3 \to R_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

משתנים קשורים: x_1, x_2, x_3

משתנים חופשיים: אין

פתרון אחד: $x_1=2,\ x_2=2,\ x_3=1$

16.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 15 \\ 3 & 7 & 12 & 56 \\ 6 & 14 & 1 & 43 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2-3R_1 \to R_2 \\ R_3-6R_1 \to R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 2 & -17 & -47 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1-2R_2 \to R_1 \\ R_3-2R_2 \to R_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & -23 & -69 \end{array}\right) \frac{R_3}{-23} \to R_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1+3R_3 \to R_1 \\ R_2-3R_3 \to R_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

משתנים קשורים: x_1, x_2, x_3

משתנים חופשיים: אין

פתרון אחד: $x_1=2,\ x_2=2,\ x_3=3$

17.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 3 & 12 \\ 6 & 15 & 15 & 36 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2-3R_1 \to R_2 \\ R_3-6R_1 \to R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & -3 & -9 & -12 \\ 0 & -3 & -9 & -12 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_3-R_2 \to R_3 \\ \frac{R_2}{-3} \to R_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) R_1-3R_2 \to R_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

משתנים קשורים: x_1, x_2 $\qquad x_1 = 5x_3 - 4$

משתנים חופשיים: x_3 $\qquad x_2 = 4 - 3x_3$

אינסוף פתרונות. פתרון כללי: $(5x_3-4,\ 4-3x_3,\ x_3)$

4.

9

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & b & -3 & b \\ 2 & 3 & b & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2-R_1\to R_2 \\ R_3-2R_1\to R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & b-1 & -2 & b-1 \\ 0 & 1 & b+2 & 1 \end{array}\right) R_2\leftrightarrow R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & b+2 & 1 \\ 0 & b-1 & -2 & b-1 \end{array}\right) R_3-(b-1)R_2\to R_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & b+2 & 1 \\ 0 & 0 & -2-(b+2)(b-1) & (b-1)-(b-1) \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & b+2 & 1 \\ 0 & 0 & -2-(b^2+b-2) & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & b+2 & 1 \\ 0 & 0 & -b^2-b & 0 \end{array}\right)$$

כאשר $-b(b+1)\neq 0$ יש פתרון אחד.

$b\neq 0,-1$

כאשר $b=0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

אינסוף פתרונות.

כאשר $b=-1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

אינסוף פתרונות.

לסיכום:

כאשר $b\neq 0,-1$ יש פתרון יחיד.

כאשר $b=0,-1$ יש אינסוף פתרונות.

אין a שלו אין פתרון.

2

11

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 4 & a & 2 & a \\ a & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_1\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 4 & a & 2 & a \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & a & 2 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{4R_2-aR_1\to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & a & 2 & a \\ 0 & 4-a^2 & 4-2a & 4-a^2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

כאשר $4-a^2\neq 0$ יש פתרון אחד.

$a^2\neq 4$

כאשר $a\neq 2,-2$ יש פתרון אחד.

כאשר $a=2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

יהיו אינסוף פתרונות.

כאשר $a=-2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-4R_3\to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

יהיו אינסוף פתרונות.

לסיכום:

כאשר $a\neq 2,-2$ יהיה פתרון יחיד.

כאשר $a=2,2$ יהיו אינסוף פתרונות.

אין מצב בו לא יהיה פתרון למערכת.

3

14

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a & 1 & 0 \\ -1 & a & 1 & -a \\ 1 & a^2 & 1 & a^3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a^2 & 1 & a^3 \\ -1 & a & 1 & -a \\ 0 & a & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2+R_1 \to R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a^2 & 1 & a^3 \\ 0 & a^2+a & 2 & a^3-a \\ 0 & a & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-R_3 \to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a^2 & 1 & a^3 \\ 0 & a^2 & 1 & a^3-a \\ 0 & a & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{aR_3-R_2 \to R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a^2 & 1 & a^3 \\ 0 & a^2 & 1 & a^3-a \\ 0 & 0 & a-1 & a-a^3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1-R_2 \to R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & a^2 & 1 & a^3-a \\ 0 & 0 & a-1 & a-a^3 \end{array}\right)$$

כאשר $a-1\neq 0$, $a^2\neq 0$ ישנו פתרון אחד.

כאשר $a=1$:

ישנם אינסוף פתרונות.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

כאשר $a=0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2+R_3 \to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון יחיד.

לסיכום:

יש למערכת פתרון יחיד כאשר $a\neq 1$.

ישנם אינסוף פתרונות למערכת כאשר $a=1$.

אין מצב בו למערכת אין פתרון.

15.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ a & a & 1 & 1 \\ 1 & a & a & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 - aR_1 \to R_2 \\ R_3 - R_1 \to R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & 0 & 1-a^2 & 1-a^2 \\ 0 & a-1 & 0 & 2-a \end{array}\right) R_2 \leftrightarrow R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & a-1 & 0 & 2-a \\ 0 & 0 & 1-a^2 & 1-a^2 \end{array}\right)$$

כאשר $1-a^2 \neq 0$, $a-1 \neq 0$

יש פתרון יחיד.

$1-a^2 \neq 0$ $\quad a-1 \neq 0$

$a^2 \neq 1$ $\quad a \neq 1$

$a \neq \pm 1$.

כאשר $a=1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

← שורת סתירה

אין פתרון.

כאשר $a=-1$:

אינסוף פתרונות.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

לסיכום:

כאשר $a \neq \pm 1$ יש פתרון אחד.

כאשר $a=1$ אין פתרון.

כאשר $a=-1$ יש אינסוף פתרונות.

5

16.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a & 1 & 0 \\ -1 & a & 1 & -a \\ 1 & a^2 & 1 & a^3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a^2 & 1 & a^3 \\ -1 & a & 1 & -a \\ 0 & a & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2+R_1 \to R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a^2 & 1 & a^3 \\ 0 & a^2+a & 2 & a^3-a \\ 0 & a & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-R_3 \to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a^2 & 1 & a^3 \\ 0 & a^2 & 1 & a^3-a \\ 0 & a & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{aR_3-R_2 \to R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a^2 & 1 & a^3 \\ 0 & a^2 & 1 & a^3-a \\ 0 & 0 & a-1 & a-a^3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1-R_2 \to R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & a^2 & 1 & a^3-a \\ 0 & 0 & a-1 & a-a^3 \end{array}\right)$$

כאשר $a-1\neq 0$, $a^2\neq 0$ ישנו פתרון אחד.

כאשר $a=1$:

ישנם אינסוף פתרונות.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

כאשר $a=0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2+R_3 \to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון יחיד.

לסיכום:

יש למערכת פתרון אחד כאשר $a\neq 1$

ישנם למערכת אינסוף פתרונות כאשר $a=1$

אין מצב בו למערכת אין פתרון.

6

לינארית - שיעורי בית 3

שם: עמית לגזן

תאריך: 25/11/2016

ת.ז.: 200042398

100

7

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 3 & 1 \\ 2 & 4 & k-2 & 1 \\ k & 0 & -k & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2-2R_1 \to R_2 \\ R_3-kR_1 \to R_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 3 & 1 \\ 0 & 4-2k & k-8 & -1 \\ 0 & -k^2 & -4k & -k \end{array}\right) R_2 \leftrightarrow R_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 3 & 1 \\ 0 & -k^2 & -4k & -k \\ 0 & 4-2k & k-8 & -1 \end{array}\right) (-k^2)R_3-(4-2k)R_2 \to R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 3 & 1 \\ 0 & -k^2 & -4k & -k \\ 0 & 0 & (k-8)(-k^2)-(4-2k)(-4k) & (-1)(-k^2)-(4-2k)(-k) \end{array}\right) \frac{R_2}{-k^2} \to R_2$$

כאשר $k\neq 0$

נבדוק מה קורה כאשר $k=0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

יהיו אינסוף פתרונות.

נמשיך לפרש:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{\cancel{-}4k}{\cancel{-}k^2} & -k \\ 0 & 0 & \cancel{8k^2}-k^3+16k-\cancel{8k^2} & k^2-(2k^2-4k) \end{array}\right)$$

כאשר $16k-k^3\neq 0,4,-4$ יש פתרון יחיד.

$k(16-k^2)\neq 0,4,-4$ כאשר $k=4$: אינסוף פתרונות

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

כאשר $k=-4$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 32 \end{array}\right)$$ שורת סתירה

סיכום:

כאשר $k\neq 0,4,-4$ יש פתרון יחיד

כאשר $k=0,4$ יש אינסוף פתרונות

כאשר $k=-4$ אין פתרון.

.1

לינארית - תרגול 6

צורה קנונית של מטריצה

הגדרה: יהי מטריצה $A_{n\times m}$ הצורה הקנונית היא שבכל שורה איבר הראשון השונה מאפס משמאל הוא 1. ועבור איבר הזה כל איברים האחרים בעמודה שלו הם אפס.

דוגמאות:

1. $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 1 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. $$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & 1 & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כל 1:

2. הפתרון של המערכת הוא $(1+2s, 2, s, s)$

יש אינסוף פתרונות. מסתכלים מימין, המשתנה החופשי הוא המשתנה הראשון מימין.

$x_4=s$ חופשי.

x_1, x_2, x_3 קשורים.

המשתנים הקשורים קובעים איפה יש 1 בצורה הקנונית של המטריצה.

למשל בדוגמא של תרגיל 2 x_1, x_2, x_3 קשורים לכן 1 בצורה הקנונית בשורה הראשון איבר ראשון משמאל. בשורה השניה איבר שני משמאל. בשורה השלישית איבר שלישי משמאל

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 1 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} \end{pmatrix}$$

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 1 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+2s \\ 2 \\ s \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$1+2s+a_{14}s=1 \rightarrow$

I $s(2+a_{14})=0 \rightarrow a_{14}+2=0 \rightarrow a_{14}=-2$

II $2+s\cdot a_{24}=2 \rightarrow s\cdot a_{24}=0 \rightarrow a_{24}=0$

III $s+s\cdot a_{34}=0 \rightarrow s(1+a_{34})=0 \rightarrow 1+a_{34}=0 \rightarrow a_{34}=-1$

תשובה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ב. $x_4=s$ חופשי

x_1,x_2,x_3 קשורים

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 1 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5s+1 \\ 2 \\ 2-0.5s \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

I $0.5s+1+s\cdot a_{14}=1 \rightarrow s(0.5+a_{14})=0 \rightarrow 0.5+a_{14}=0 \rightarrow a_{14}=-0.5$

II $2+s\cdot a_{24}=2 \rightarrow s\cdot a_{24}=0 \rightarrow a_{24}=0$

III $2-0.5s+s\cdot a_{34}=2 \rightarrow s(a_{34}-0.5)=0 \rightarrow a_{34}-0.5=0 \rightarrow a_{34}=0.5$

תשובה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \end{pmatrix}$$

10. $t=x_3$ חופשי

x_1,x_2,x_4 קשורים.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & 1 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t \\ t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I $-t+t\cdot a_{13}=0 \rightarrow t(a_{13}-1)=0 \rightarrow a_{13}-1=0 \rightarrow a_{13}=1$

II $t+t\cdot a_{23}=0 \rightarrow t(1+a_{23})=0 \rightarrow a_{23}+1=0 \rightarrow a_{23}=-1$

III $t\cdot a_{33}=0 \rightarrow a_{33}=0$

ב.

תשובה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

יב.

חופשיים $\begin{cases} t = x_4 \\ s = x_2 \end{cases}$

קשורים x_1, x_3.

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & 1 & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+s-2t \\ s \\ 1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I $\quad 1+s-2t+s\cdot a_{12}+t\cdot a_{14}=1 \to s(1+a_{12})+t(a_{14}-2)=0 \to$

$s=0$, $a_{14}-2=0 \to a_{14}=2$, $t=0$, $1+a_{12}=0 \to a_{12}=-1$

II $\quad 1+t\cdot a_{24}=1 \to t\cdot a_{24}=0 \to a_{24}=0$

תשובה:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

.3

תרגיל

.1

נתונה ממ"ה $\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & 1 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ שמטריצה שלה רשומה בצורה

מדורגת קנונית. מצא את $A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & 1 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$ אם ידוע שהוקטורים

$(1,1,1,1),(1,2,4,4)$ הם פתרונות פרטיים של המערכת.

.2

הפתרון הכללי של הממ"ל $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ שווה ל- $(1+2s,2,s,s)$

רשום את $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$ בצורה מדורגת קנונית.

3

המטריצה של הממ"ל $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ רשומה בצורה מדורגת

קנונית. מצא את המטריצה $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$ עם ידוע שהפתרון הכללי שך

המערכת שווה ל- $(1+s-2t,s,1,t)$.

4. נתונה מטריצות ממשית A בצורה מדורגת קנונית: $A=\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \end{pmatrix}$.

מצא את A אם ידוע שהווקטור $(-1,2,2,0)$ הוא פתרון של הממ"ל $AX=0$.

5.

הפתרון הכללי של הממ"ל $\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ שווה ל-

$(0.5s+1,2,2-0.5s,s)$ רשום את A בצורה מדורגת קנונית.

6.

נתונה מטריצה בצורה מדורגת קנונית $A=\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$. ידוע כי הוקטור

$(-1,2,2,0)$ הוא פתרון של המערכת $AX=0$. מצא את A.

7.

המטריצה של הממ"ל $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ רשומה בצורה מדורגת

קנונית. מצא את המטריצה $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$ עם ידוע שהפתרון הכללי שך

המערכת שווה ל- $(1+s-2t,1,s,t)$.

8. המטריצה של הממ"ל $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -0.5 \\ -1.5 \\ 0 \end{pmatrix}$ רשומה בצורה מדורגת

קנונית. מצא את המטריצה $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$ עם ידוע שהפתרון הכללי של

המערכת שווה ל- $(t-0.5,t,-1.5,0)$.

9. המטריצה של הממ"ל $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ רשומה בצורה מדורגת

קנונית. מצא את המטריצה $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$ עם ידוע שהוקטורים

$(-1,-2,1,1),(2,4,-2,3)$ הם פתרונות של המערכת.

10. המטריצה של הממ"ל $\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ רשומה בצורה מדורגת

קנונית. מצא את המטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$ עם ידוע שהפתרון הכללי של

המערכת שווה ל- $(-t,t,t,0)$.

11. נתונה מטריצה ממשית A בצורה מדורגת קנונית: $A=\begin{pmatrix}1 & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & 0 & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1\end{pmatrix}$.

מצא את A אם ידוע שהווקטור $(1,1,1,1)$ הוא פתרון של הממ״ל $AX=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

12. המטריצה של הממ״ל $\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ רשומה בצורה מדורגת קנונית. מצא את המטריצה $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{pmatrix}$ עם ידוע שהפתרון הכללי של המערכת שווה ל- $(1+s-2t,s,1,t)$.

13. המטריצה של מערכת המשוואות הלינאריות $\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix}$ רשומה בצורה מדורגת קנונית. מצא את המטריצה $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{pmatrix}$ והפרמטרים a,b עם ידוע שהפתרון הכללי של המערכת שווה ל- $(2-2t,t+2,t,t)$.

בדוק מי מהן נילפוטנטית ועבור המטריצות הנילפוטנטיות מהו אינדקס הנילפוטנטיות ?

.26 C מטריצה סימטרית מסדר 2 שאיבריה אי-שליליים. סכום איברי אלכסונה הראשי שונה מ-0 ומתקיים עבורה $C(C - I) = I - C$. מצא מהי C.

.27 A מטריצה משולשית עליונה מסדר 2. B מטריצה סימטרית מסדר 2. נתון ש- $A+B$ מטריצה סימטרית. הוכח ש- A מטריצה אלכסונית.

.28 חשב את ההופכית של:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ו-} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.29 נתונות המטריצות:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ו-} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

חשב, במידה ואפשר, את A^{-1}, B^{-1}, $(AB)^{-1}$, $(B^t)^{-1}$ ו- $(A+B)^{-1}$.

.30 העזר בתכונה 10. על מנת לחשב את A^{-1} עבור:

תכונות של הלות

א. $A = \begin{pmatrix} 0.02 & 0.02 \\ 0.01 & 0.02 \end{pmatrix}$ ב. $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}$

.31 קבע אלו מהמטריצות הבאות הפיכה ? נמק !

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & 6 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad ,D = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

32. תהי A מטריצה מגודל $2x1$ ו- B מגודל $1x2$. הוכח ש- AB לא הפיכה.

33. פתור את המערכות הבאות באמצעות A^{-1}:

א.
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 3 \\ -x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

ב.
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1 \end{cases}$$

34. נתונה המערכת $AX = B$. פתור אותה באמצעות A^{-1} עבור:

א. A היא המטריצה A מתרגיל 28 ו- $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

ב. A היא המטריצה C מתרגיל 28 ו- $B = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

318

לינארית - תרגול 7

צורה קנונית של מטריצות

12. $(1+s-2t, s, 1, t) \leftarrow$ x_2, x_4 חופשיים

x_1, x_3 קשורים

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & 1 & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+s-2t \\ s \\ 1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$1+s-2t+a_{12}s+a_{14}t=1$

$s(1+a_{12})+t(-2+a_{14})=0$ (כי לכל s ו- t)

לכן $1+a_{12}=0 \leftarrow a_{12}=-1$

$-2+a_{14}=0 \leftarrow a_{14}=2$

$1+a_{24}t=1 \leftarrow a_{24}t=0 \leftarrow a_{24}=0$

$0=0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

11.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ פתרון $(1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$

יש רק משתנה חופשי 1 ויש 3 משתנים קשורים.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$a_{13}=0 \leftarrow 1+a_{13}=1$

$1=1$

$1=1$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מטריצה הפוכה:

הגדרה: יהי $A_{n\times n}$ נקראת מטריצה הפיכה אם קיימת $B_{n\times n}$ מטריצה כך ש-:

I. $A\cdot B = I_n$

II. $B\cdot A = I_n$

נסמן $\boxed{B=A^{-1}}$

<u>דוגמא:</u>

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

צריך למצוא $B=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$

כך ש- I $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

II $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1+2x_3 & x_2+2x_4 \\ 3x_1+4x_3 & 3x_2+4x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$x_1+2x_3=1$ $\qquad$ $x_2+2x_4=0$

$3x_2+4x_4=0$ $\qquad$ $3x_1+4x_3=1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \longleftarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

2

$R_2-3R_1\to R_2$ $\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -3 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{\frac{R_2}{-2}\to R_2} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{array}\right)$

$R_1-2R_2\to R_1$ $\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{array}\right)$ $x_2=1$ $x_1=-2$ $x_4=-\frac{1}{2}$ $x_3=\frac{3}{2}$

$$B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

:II

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

תרגיל:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 2 & 4 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{R_2-2R_1\to R_2} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 1\end{array}\right)$$

אין פתרון לכן $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ לא הפיכה.

תרגיל:

בדוק אם A הפיכה. אם כן מצא A^{-1}

1) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

2) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$

1) $\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{R_2-3R_1\to R_2} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -3 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{\frac{R_2}{-2}\to R_2}$

$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{array}\right) \xrightarrow{R_1-2R_2\to R_1} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{array}\right)$ $A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ לכן A הפיכה .3

2. $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-2R_1\to R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$

A לא הפיכה.

$$(A \mid I_n) \dashrightarrow (I_n \mid A^{-1})$$

<u>תרגיל:</u>

בדוק האם A הפיכה אם כן מצאו A^{-1}:

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

2. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix}$

1. $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-7R_1\to R_3]{R_2-4R_1\to R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{R_3+2R_2\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$ לא הפיכה.

2. $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-7R_1\to R_3]{R_2-4R_1\to R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[\frac{R_3}{-6}\to R_3]{\frac{R_2}{-3}\to R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{7}{6} & 0 & \frac{-1}{6} \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{R_3}{-1}\to R_3]{R_1-2R_2\to R_1,\ R_3-R_2\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}\right)$

4.

$R_1+R_3\to R_1$
$R_2-2R_3\to R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}\right)$$

תכונות של מטריצה הפיכה:

נתון $A_{n\times n}$ ו- $B_{n\times n}$ מטריצות הפיכות ו- $0\neq k\in\mathbb{R}$

1. $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$

2. $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

3. $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$

הוכחה של תכונה 1:

צ"ל I $(kA)\cdot(\frac{1}{k}A^{-1})=I_n$

II $(\frac{1}{k}A^{-1})\cdot(kA)=I_n$

I: $(kA)(\frac{1}{k}A^{-1})=k\cdot\frac{1}{k}A\cdot A^{-1}=1\cdot I_n=I_n$

II: $(\frac{1}{k}A^{-1})(kA)=\frac{1}{k}\cdot kA^{-1}\cdot A=1\cdot I_n=I_n$

הוכחה תכונה 2:

צ"ל

I. $A^T\cdot(A^{-1})=I_n$

II. $(A^{-1})\cdot A^T=I_n$

דרך 1:

I $A^T\cdot(A^{-1})^T=(A^{-1}A)^T=(I_n)^T=I_n$

תכונה של שחלוף

II $(A^{-1})^T\cdot A^T=(A\cdot A^{-1})^T=(I_n)^T=I_n$

פרק ב:

I: $A^{-1}\cdot A = I_n$

$\leftarrow \quad (A\cdot A^{-1})^T = (I_n)^T$

$\leftarrow \quad A^T\cdot (A^{-1})^T = I_n$

II: $A\cdot A^{-1} = I_n$

$\leftarrow \quad (A\cdot A^{-1})^T = (I_n)^T$

$\leftarrow \quad (A^{-1})^T\cdot A^T = I_n$

פתרון מערכת משוואות ע"י מטריצה הפוכה:

$2x=5$

$\frac{1}{2}\cdot 2x = \frac{1}{2}\cdot 5 \quad \leftarrow \quad 2^{-1}\cdot 2x = 2^{-1}\cdot 5$

$\leftarrow \quad x = 2^{-1}\cdot 5$

$Ax=b$ כך ש- A הפיכה.

$\leftarrow \quad A^{-1}(Ax) = A^{-1}b$

$\leftarrow \quad (A^{-1}A)x = A^{-1}b$

$\leftarrow \quad I_n x = A^{-1}b$

$\leftarrow \quad x = A^{-1}b$

רק אם A הפיכה אחרת זה לא נכון!

דוגמא:

$x+2y=5$

$3x+4y=6$

$\leftarrow \quad \begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$

צריך לבדוק אם $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ הפיכה (בדקנו קודם והפיכה!)

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1\\ \frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$x = -4$

$y = 4\frac{1}{2}$

דף תרגיל במטריצות:

1.

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} R_2 - R_1 \to R_2 \\ R_3 - R_1 \to R_2 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \frac{R_2}{-1} \to R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} R_1 - 2R_2 \to R_1 \\ R_3 + 3R_2 \to R_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \frac{R_3}{-1} \to R_3 \\ R_2 + R_3 \to R_2 \\ R_1 - R_3 \to R_1 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -1 \end{array}\right) \qquad X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$XA = B$	$AX = B$
$X = B \cdot A^{-1}$	$X = A^{-1} B$

ש"ב: תרגיל 8 (לפני שבועיים)

דף של שבוע שעבר: תרגיל 4, 5, 6, 7, 8, 9, 13.

דף חדש: תרגיל 28, 29, 30, 31, 33, 34

7.

שם: שמית לוטן

תאריך: 29/11/2016

ת.ז.: 200042398

100

לינארית - שיעורי בית 4

2\.

א.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2&0&1\\-1&4&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}$$

$2\times\boxed{3}$ $\quad$ $\boxed{3}\times 1$

כפל אפשרי

$$=\begin{pmatrix}2\cdot4+0\cdot1+1\cdot(-2)\\(-1)\cdot4+4\cdot1+(-2)\cdot(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8+0-2\\-4+4+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&1\\-1&4&-2\end{pmatrix}$$

$3\times\boxed{1}$ $\quad$ $\boxed{2}\times 3$

כפל לא אפשרי במצב זה.

ב.

$$A\cdot C=\begin{pmatrix}2&0&1\\-1&4&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\3&4\\-1&2\end{pmatrix}$$

$2\times\boxed{3}$ $\quad$ $\boxed{3}\times 2$

כפל אפשרי

$$=\begin{pmatrix}2\cdot1+0\cdot3+1\cdot(-1) & 2\cdot0+0\cdot4+1\cdot2\\1\cdot(-1)+4\cdot3+(-2)\cdot(-1) & (-1)\cdot0+4\cdot4+2\cdot(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+0-1 & 0+0+2\\-1+12+2 & 0+16-4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2\\13&12\end{pmatrix}$$

$$C\cdot A=\begin{pmatrix}1&0\\3&4\\-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&1\\-1&4&-2\end{pmatrix}$$

$3\times\boxed{2}$ $\quad$ $\boxed{2}\times 3$

כפל אפשרי

$$=\begin{pmatrix}1\cdot2+0\cdot(-1) & 1\cdot0+0\cdot4 & 1\cdot1+0\cdot(-2)\\3\cdot2+4\cdot(-1) & 3\cdot0+4\cdot4 & 3\cdot1+4\cdot(-2)\\(-1)\cdot2+2\cdot(-1) & (-1)\cdot0+2\cdot4 & (-1)\cdot1+2\cdot(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+0 & 0+0 & 1+0\\6+(-4) & 0+16 & 3+(-8)\\(-2)+(-2) & 0+8 & (-1)+(-4)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&0&1\\2&16&-5\\-4&8&-5\end{pmatrix}$$

המכפלות אינן שוות.

1\.

.e (i)

$$D\cdot E=\begin{pmatrix}5&0\\-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot1+0\cdot3&5\cdot2+0\cdot4\\(-1)\cdot1+2\cdot3&(-1)\cdot2+2\cdot4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}5+0&10+0\\(-1)+6&(-2)+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&10\\5&6\end{pmatrix}$$

$$D\cdot E=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&0\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot5+2\cdot(-1)&1\cdot0+2\cdot2\\3\cdot5+4\cdot(-1)&3\cdot0+4\cdot2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}5+(-2)&0+4\\15+(-4)&0+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&4\\11&8\end{pmatrix}$$

המכפלות אינן שוות.

(ii)

$$(D-E)^2=\left[\begin{pmatrix}5&0\\-1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\right]^2=\left[\begin{pmatrix}4&-2\\-4&-2\end{pmatrix}\right]^2$$

$$=\begin{pmatrix}4&-2\\-4&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&-2\\-4&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot4+(-2)\cdot(-4)&4\cdot(-2)+(-2)\cdot(-2)\\(-4)\cdot4+(-2)\cdot(-4)&(-4)\cdot(-2)+(-2)\cdot(-2)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}16+8&(-8)+4\\-16+8&8+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24&-4\\-8&12\end{pmatrix}$$

$$D^2-2DE+E^2=\left[\begin{pmatrix}5&0\\-1&2\end{pmatrix}\right]^2-2\begin{pmatrix}5&0\\-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+\left[\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\right]^2$$

נחשב כל חלק בנפרד ואז נשים את הכל ביחד:

$$D^2=\begin{pmatrix}5&0\\-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&0\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot5+0\cdot(-1)&5\cdot0+0\cdot2\\(-1)\cdot5+2\cdot(-1)&(-1)\cdot0+2\cdot2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}25+0&0+0\\(-5)+(-2)&0+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25&0\\-7&4\end{pmatrix}$$

$$2DE=2\cdot\begin{pmatrix}5&0\\-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}5\cdot1+0\cdot3&5\cdot2+0\cdot4\\(-1)\cdot1+2\cdot3&(-1)\cdot2+2\cdot4\end{pmatrix}$$

$$=2\cdot\begin{pmatrix}5+0&10+0\\(-1)+6&(-2)+8\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}5&10\\5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&20\\10&12\end{pmatrix}$$

.2

$$E^2=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot3&1\cdot2+2\cdot4\\3\cdot1+4\cdot3&3\cdot2+4\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+6&2+8\\3+12&6+16\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}7&10\\15&22\end{pmatrix}$$

$$D^2-2DE+E^2=\begin{pmatrix}25&0\\-7&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10&20\\10&12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7&10\\15&22\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25-10+7&0-20+10\\(-7)-10+15&4-12+22\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}22&-10\\-2&14\end{pmatrix}$$

הביטויים אינם שווים.

חוברת שנייה:

5.

$$\underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}_{2\times2}\cdot\underbrace{X}_{n\times m}+\left(\underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}_{2\times2}\cdot\underbrace{X}_{2\times m}\right)^T=\underbrace{X}_{2\times m}+\underbrace{X^T}_{2\times m}$$

בגלל השיחלוף ואז החיבור $m=2$. לכן $n=2$.

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}+\left[\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x&y\\w&z\end{pmatrix}\right]^T=\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}^T$$

$$=\begin{pmatrix}z&w\\x&y\end{pmatrix}+\left[\begin{pmatrix}w&z\\ &y\end{pmatrix}\right]^T=\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x&z\\y&w\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}z&w\\x&y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}w&x\\z&y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x&y+z\\z+y&2w\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}z+w&x+w\\x+z&2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x&y+z\\z+y&2w\end{pmatrix}$$

II $2x - w - z = 0 \leftarrow 2x = z+w$

I $x - y + w - z = 0 \leftarrow x+w = y+z$

III $x - y = 0 \leftarrow x+z = z+y$

IV $2y - 2w = 0 \leftarrow 2y = 2w$

$$\begin{array}{cccc} x & y & w & z \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&1&-1&0\\2&0&-1&-1&0\\1&-1&0&0&0\\0&2&-2&0&0\end{array}\right)\begin{array}{l}R_2-2R_1\to R_2\\ \\ R_3-R_1\to R_3\end{array}\quad\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&1&-1&0\\0&-2&-3&1&0\\0&0&-1&1&0\\0&2&-2&0&0\end{array}\right)R_2\leftrightarrow R_4$$

.3

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \frac{R_2}{2} \to R_2 \\ \frac{R_3}{-1} \to R_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_4+2R_2 \to R_4 \\ R_1+R_2 \to R_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2+R_3 \to R_2 \\ R_4+5R_3 \to R_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \frac{R_4}{-4} \to R_4$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1+R_4 \to R_1 \\ R_2+R_4 \to R_2 \\ R_3+R_4 \to R_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

יש פתרון יחיד. $x=0$, $y=0$, $w=0$, $z=0$. כל המשתנים קשורים.

לכן מטריצה X נראית כך: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

7

$$\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{m\times n}{X} - \underset{2\times n}{X} \cdot \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

לכן $n=2$ לכן $m=2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x+z & y+w \\ z & w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & x+y \\ z & z+w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} z & w-x \\ 0 & -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{III} & z & = & 1 \\ \text{I} & -x + w & = & 0 \\ \text{IV} & 0 & = & 0 \\ \text{II} & -z & = & -1 \end{array}$$

4.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & w & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow{\frac{R_1}{-1} \to R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{R_2}{-1} \to R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - R_2 \to R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x = w$, y , w , $z = 1$ קשורים x, z

חופשי y, w לכן X תראה כך:

$$\begin{pmatrix} w & y \\ 1 & w \end{pmatrix}$$

ישנם אינסוף פתרונות למטריצה X.

16

$$\underset{2\times2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{n\times m}{X} = -\underset{2\times m}{X} \cdot \underset{3\times3}{\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

לכן $n=2$ לכן $m=3$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+2d & b+2e & c+2f \\ d & e & f \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -a & 2a-b & 3b-c \\ -d & 2d-e & 3e-f \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+2d & b+2e & c+2f \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b-2a & c-3b \\ d & e-2d & f-3e \end{pmatrix}$$

$$\text{VI}\ \ 0=0 \leftarrow d=d \qquad\qquad \text{III}\ \ 2d=0 \leftarrow a+2d=a$$

$$\text{IV}\ \ 2d=0 \leftarrow e=e-2d \qquad\qquad \text{I}\ \ 2e+2a=0 \leftarrow b+2e=b-2a$$

$$\text{V}\ \ 3e=0 \leftarrow f=f-3e \qquad\qquad \text{II}\ \ 2f+3b=0 \leftarrow c+2f=c-3b$$

$$
\begin{array}{cccccc|c}
a & b & c & d & e & f & \\
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccccc|c}
2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\
\cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0}
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\frac{R_1}{2} \to R_1 \\
R_4 - R_3 \to R_4 \\
\frac{R_5}{3} \to R_5 \\
\frac{R_4}{2} \to R_4
\end{array}
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

$R_1 - R_5 \to R_1$

$\frac{R_2}{3} \to R_2$

$$
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

קשורים: a, b, d, e

חופשיים: c, f

אינסוף פתרונות.

$$a=0,\ b=-\frac{2}{3}f,\ c,\ d=0,\ e=0,\ f$$

לכן מטריצה X נראה כך:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{3}f & c \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

13

$$\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{n\times m}{X} = \underset{2\times m}{X} \cdot \underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

$n=2$ לכן $\quad$ $m=3$ לכן

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2d-a & 2e-b & 2f-c \\ -d & -e & -f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & a-b & b-c \\ -d & d-e & e-f \end{pmatrix}$$

$\mathrm{VI}\ 0=0 \leftarrow -d=-d \qquad \mathrm{I}\ 2d=0 \leftarrow 2d-a=-a$

$\mathrm{III}\ d=0 \leftarrow -e=d-e \qquad \mathrm{I}\ 2e-a=0 \leftarrow 2e-b=a-b$

$\mathrm{IV}\ e=0 \leftarrow -f=e-f \qquad \mathrm{II}\ 2f-b=0 \leftarrow 2f-c=b-c$

.6

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \frac{R_1}{-1} \to R_1 \\ \frac{R_2}{-1} \to R_2 \\ R_5 - 2R_3 \to R_5 \\ R_1 + 2R_4 \to R_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

קשורים: a, b, d, e

חופשיים: c, f

לכן אינסוף פתרונות.

$a=0,\ b=2f,\ c,\ d=0,\ e=0,\ f$

מטריצה X נראה כך:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2f & c \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

18

$$\Big[\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{2\times 2} \cdot \underbrace{X}_{n\times m}\Big]^T = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{3\times 3} \cdot \underbrace{X^T}_{2\times m}$$

$n=2$ לכן

אחרי שיוויון $m=3$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}\right]^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} a+2d & b+2e & c+2f \\ d & e & f \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+2d & d \\ b+2e & e \\ c+2f & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & d+e \\ b+c & e+f \\ c & f \end{pmatrix}$$

I $2d-b=0 \leftarrow a+2d = a+b$

II $2e-c=0 \leftarrow b+2e = b+c$

V $2f=0 \leftarrow c+2f = c$

III $e=0 \leftarrow d = d+e$

IV $f=0 \leftarrow e = e+f$

VI $0=0 \leftarrow f = f$

.7

$$\begin{array}{cccccc|c} a & b & c & d & e & f & \\ \hline \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \begin{array}{l} \frac{R_1}{-1} \to R_1 \\ \frac{R_2}{-1} \to R_2 \\ R_2 - 2R_3 \to R_2 \\ R_5 - 2R_4 \to R_5 \end{array} \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

קשורים: b, c, e, f

חופשיים: a, d

$a, b=2d, c=0, d, e=0, f=0$

אוסף פתרונות. לכן X יראה כך:

$$\begin{pmatrix} a & 2d & 0 \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

23

$$\underbrace{\underset{n\times m}{X} \cdot \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}}_{n\times 2} = \underbrace{\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{n\times 2}{X^T}}_{2\times n}$$

לכן $m=2$ צ"ל $m=2$

בשביל שהכפלים יהיו שווים, $n=2$.

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x & 2x+y \\ z & 2z+w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y & z+2w \\ y & w \end{pmatrix}$$

$\mathrm{II}\ 2y=0 \leftarrow x=x+2y$

$\mathrm{I}\ 2x+y-z-2w=0 \leftarrow 2x+y=z+2w$

$\mathrm{III}\ y-z=0 \leftarrow z=y$

$\mathrm{IV}\ 2z=0 \leftarrow 2z+w=w$

$$\begin{array}{cccc|c} x & y & z & w & \\ \hline \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{R_2}{2} \to R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 - R_2 \to R_1 \\ R_3 - R_2 \to R_3 \\ \frac{R_3}{-1} \to R_3 \end{array}$$

.8

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1+R_3 \to R_1 \\ R_4-2R_3 \to R_4 \\ \frac{R_1}{2} \to R_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

קשורים: x, y, z

חופשיים: w

$x = w,\ y=0,\ z=0,\ w$

אוסף פתרונות לכן $X := \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}$ ✓

32

$$\underset{3\times3}{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}} \cdot \underset{n\times m}{X} - \left[\underset{2\times2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{n\times m}{X^T}\right]^T = \underset{3\times2}{X}$$

לכן $n=3$

לכן $m=2$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}^T\right]^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2a-c & 2b-d \\ 2c-e & 2d-f \\ 2e & 2f \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix}\right]^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2a-c & 2b-d \\ 2c-e & 2d-f \\ 2e & 2f \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & c & e \\ b-a & d-c & f-e \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2a-c & 2b-d \\ 2c-e & 2d-f \\ 2e & 2f \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b-a \\ c & d-c \\ e & f-e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

.9

$$= \begin{pmatrix} a-c & b-d+a \\ c-e & d-f+c \\ e & f+e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

II $c=0 \leftarrow a-c=a$

I $a-d=0 \leftarrow b-d+a=b$

III $e=0 \leftarrow c-e=c$

V $e=0 \leftarrow f+e=f$ VI $0=0 \leftarrow e=e$ IV $c+f=0 \leftarrow d-f+c=d$

$$\begin{array}{cccccc|c} a & b & c & d & e & f & \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} R_4-R_2 \to R_4 \\ R_5-R_3 \to R_5 \end{matrix} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

קשורים: a, c, e, f

חופשיים: b, d

$a=d,\ b,\ c=0,\ d,\ e=0,\ f=0$

אינסוף פתרונות. לכן X יהיה:

$$\begin{pmatrix} d & b \\ 0 & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

33 מכוון שצריך להפחית את השיחלוף של עצמה:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{2\times 2} \cdot \underbrace{X}_{n\times m} - \left[\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{2\times 2} \cdot X\right]^T_{2\times m} = X - X^T \quad m=2$$

לכן $n=2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\right]^T = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} z & w \\ -x & -y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z & w \\ -x & -y \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} z & w \\ -x & -y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z & -x \\ w & -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & y-z \\ z-y & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & w+x \\ -x-w & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & y-z \\ z-y & 0 \end{pmatrix}$$

III $0=0$

I $x-y+z+w=0 \leftarrow w+x=y-z$

II $-x+y-z-w=0 \leftarrow -x-w=z-y$

IV $0=0$

10.

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & w \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2+R_1\to R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

חופשיים: y, z, w

קשורים: x $\quad x=y-z-w, y, z, w$

אינסוף פתרונות. לכן X יהיה:

$$\begin{pmatrix} y-z-w & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

גג.

שם: עמית לוין

תאריך: 7/12/2016

ת.ז.: 200042398

100

לינארית - שיעורי בית 2

12

$A^{2n+1}=4^n\cdot A$ לכל $n\geq 0$

שלב 1: $n=0$

$$A^{2(0)+1}=4^0\cdot A$$

$$A=A$$

שלב 2: $n=k$

נתון: $A^{2k+1}=4^k\cdot A$

שלב 3: $n=k+1$

$$A^{2(k+1)+1}=4^{k+1}\cdot A$$

$$A^{2k+3}=4\cdot 4^k\cdot A$$

$$A^{2k+1}\cdot A^2=4\cdot 4^k\cdot A$$

לפי נתון: $\cancel{4^k}\cdot A\cdot A^2=4\cdot \cancel{4^k}\cdot A$

$$A^3=4A$$

נבדוק ששני הצדדים באמת שווים:

צד שמאל:

$$A^3=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4&4&4\\4&4&-4&-4\\4&-4&4&-4\\4&-4&-4&4\end{pmatrix}$$

צד ימין:

$$4A=4\cdot\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4&4&4\\4&4&-4&-4\\4&-4&4&-4\\4&-4&-4&4\end{pmatrix}$$

הצדדים שווים. לכן הוכחנו באינדוקציה.

1.

15

$A_{n\times n}$ $\quad A^2=4A-3I_n$

א

$$A^3=A\cdot A^2=A\cdot(4A-3I_n)$$
$$=4A^2-3I_n\cdot A$$
$$=4(4A-3I_n)-3A$$
$$=16A-12I_n-3A$$
$$=13A-12I_n$$

ב

צ"ל: $A^k=0.5[(3^k-1)\cdot A-(3^k-3)I_n]$

שלב 1: $k=1$

$$A^1=0.5[(3^1-1)\cdot A-(3^1-3)I_n]$$
$$A=0.5\cdot(2A)$$
$$A=A$$

שלב 2: $k=m$

נניח: $A^m=0.5[(3^m-1)\cdot A-(3^m-3)I_n]$

שלב 3: $k=m+1$

$$A^{m+1}=0.5[(3^{m+1}-1)\cdot A-(3^{m+1}-3)I_n]$$

נכפיל את 33 משמאל:

$$A^{m+1}=A^m\cdot A=A\cdot 0.5[(3^m-1)\cdot A-(3^m-3)I_n]$$
$$=0.5[(3^m-1)\cdot A^2-(3^m-3)A]$$
$$=0.5[(3^m-1)(4A-3I_n)-(3^m-3)A]$$
$$=0.5[\cancel{4A\cdot 3^m}-\cancel{4A}-3I_n\cdot 3^m+3I_n-\cancel{A\cdot 3^m}+\cancel{3A}]$$
$$=0.5[3A\cdot 3^m-A-3I_n 3^m+3I_n]$$
$$=0.5[(3\cdot 3^m-1)A-(3\cdot 3^m-3)I_n]$$
$$=0.5[(3^{m+1}-1)A-(3^{m+1}-3)I_n]$$

הטענה לכל n טבעי לכן הוכחנו באינדוקציה.

ג.

17 צ"ל:

$$\begin{pmatrix} 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^k$$

לכל k טבעי.

הוכחה: אינדוקציה על k.

שלב 1: $k=1$

$$\begin{pmatrix} 2^{1-1} & 0 & 2^{1-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{1-1} & 0 & 2^{1-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

שלב 2: נניח נכונות עבור $k=m$

נתון:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} 2^{m-1} & 0 & 2^{m-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{m-1} & 0 & 2^{m-1} \end{pmatrix}$$

שלב 3: צ"ל נכונות עבור $k=m+1$

צ"ל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{m+1} = \begin{pmatrix} 2^{m} & 0 & 2^{m} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{m} & 0 & 2^{m} \end{pmatrix}$$

נפרק את צד שמאל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{m+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^m =$$ לפי נתון $=$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^{m-1} & 0 & 2^{m-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{m-1} & 0 & 2^{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{m-1}+2^{m-1} & 0 & 2^{m-1}+2^{m-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{m-1}+2^{m-1} & 0 & 2^{m-1}+2^{m-1} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2\cdot 2^{m-1} & 0 & 2\cdot 2^{m-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2\cdot 2^{m-1} & 0 & 2\cdot 2^{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{m-1+1} & 0 & 2^{m-1+1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{m-1+1} & 0 & 2^{m-1+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{m} & 0 & 2^{m} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{m} & 0 & 2^{m} \end{pmatrix}$$

הגענו לצד ימין ולכן הוכחנו באינדוקציה.

.3

לינארית - תרגול 8

מטריצה הפיכה:

21

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & \vdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1+R_2+\dots+R_n \to R_1} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} n-1 & n-1 & \cdots & \cdots & n-1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{R_1}{n-1} \to R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & \vdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_3-R_1\to R_3 \\ \vdots \\ R_n-R_1 \to R_n}]{R_2-R_1\to R_2} \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ 0 & -1 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{-1}{n-1} & 1-\frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{-1}{n-1} \\ \vdots & \vdots & -1 & & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & -1 & \frac{-1}{n-1} & \frac{-1}{n-1} & \cdots & 1-\frac{1}{n-1} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1+R_2+R_3+\dots+R_n \to R_1} \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{2-n}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & \frac{-1}{n-1} & \frac{n-2}{n-1} & \cdots & \frac{-1}{n-1} \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \frac{-1}{n-1} & \frac{-1}{n-1} & \cdots & \frac{n-2}{n-1} \end{array}\right)$$

איבר אלכסון:

$$1-\frac{1}{n-1} = \frac{n-1-1}{n-1} = \frac{n-2}{n-1}$$

עמודות $2-n$

$$\frac{1}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} + \frac{-1}{n-1}\cdot(n-2)$$

$$= \frac{1+n-2-(n-2)}{n-1} = \frac{1}{n-1}$$

$$\xrightarrow[\substack{\frac{R_3}{-1} \to R_3 \\ \vdots \\ \frac{R_n}{-1} \to R_n}]{\frac{R_2}{-1} \to R_2} \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{2-n}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n-1} & \frac{2-n}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{2-n}{n-1} \end{array}\right)$$

24

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & -n & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots -n & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_3-R_1\to R_3 \\ \vdots \\ R_n-R_1\to R_n}]{R_2-R_1\to R_2} \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots -n-1 & 1+n & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ -n-1 & 0 & 0 & 0 & 1+n & -1 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\frac{R_3}{-1-n}\to R_3 \\ \vdots \\ \frac{R_n}{-1-n}\to R_n}]{\frac{R_2}{-1-n}\to R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1-n & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 & \frac{-1}{-1-n} & \frac{1}{-1-n} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \frac{-1}{-1-n} & 0 & \cdots & \frac{1}{-1-n} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1-R_2-\dots-R_n \to R_1} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 & \frac{-1}{-1-n} & \frac{1}{-1-n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \frac{-1}{-n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{1}{-1-n} \end{array}\right)$$

$$1-\frac{-1}{n-1}(n-1) = 2$$

$R_2-R_1 \to R_2$

$R_3-R_1 \to R_3$

$\vdots$

$R_n-R_1 \to R_n$

.1

$$\left(\begin{array}{ccccc|cccc} 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \frac{2n+1}{n+1} & \frac{-2}{n+1} & \cdots & \frac{-1}{n+1} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{2n+1}{n+1} & \frac{-1}{n+1} & & \frac{-2}{n+1} \end{array}\right) \begin{array}{l} -R_1 \leftrightarrow R_n \\ R_2 \leftrightarrow R_{n-1} \\ R_3 \leftrightarrow R_{n-2} \\ \vdots \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 & \frac{2n+1}{n+1} & \frac{-1}{n+1} & \cdots & & \frac{-2}{n+1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 & \frac{2n+1}{n+1} & \frac{-1}{n+1} & \cdots & \frac{-2}{n+1} & \frac{-1}{n+1} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & & 0 & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & 1 & -2 & \frac{-1}{n+1} & \cdots & & \frac{-1}{n+1} \end{array}\right)$$

2. א. נתון A ו- B מטריצות הפיכות $\leftarrow$ A^{-1} ו- B^{-1} קיימות.

הוכח $AB=BA \longleftrightarrow A^{-1}B^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

הוכחה:

$(\leftarrow)$ נתון $AB=BA$

צ"ל $A^{-1}B^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

מכאן: A,B הפיכות $\leftarrow$ AB הפיכה כך ש- $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

נתון: $AB=BA \Longleftarrow (AB)^{-1}=(BA)^{-1}$

$B^{-1}A^{-1}=A^{-1}B^{-1}$

$(\rightarrow)$ נתון $A^{-1}B^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

צ"ל $AB=BA$

$A^{-1}B^{-1}=B^{-1}A^{-1} \longleftarrow (BA)^{-1}=(AB)^{-1}$

$((BA)^{-1})^{-1}=((AB)^{-1})^{-1}$

$BA=AB$ מ.ש.ל.

ב. הוכח $AB=BA \longleftrightarrow (AB)^2=A^2B^2$

הוכחה:

$(\leftarrow)$ נתון: $AB=BA$

צ"ל: $(AB)^2=A^2B^2$

$$\underbrace{(AB)^2=(AB)(AB)=}_{\text{תכונה כפל מטריצות אסוציאטיבי}} A(BA)B \underset{AB=BA}{\overset{\text{נתון}}{=}} \underbrace{A(AB)B=}_{\text{אסוציאטיבי}} (AA)(BB)=A^2B^2$$

.2

(→) נתון: $(AB)^2=A^2B^2$

צ"ל: $AB=BA$

$\leftarrow \; A^{-1}(AB)(AB)B^{-1}=A^{-1}(AA)(BB)B^{-1} \leftarrow (AB)(AB)=(AA)(BB) \leftarrow (AB)^2=A^2B^2$

נתון: A,B הפיכות. A^{-1}, B^{-1} קיימות.

אסוציאטיביות

$BA=AB \leftarrow \overbrace{(A^{-1}A)}^{I_n}(BA)\overbrace{(BB^{-1})}^{I_n}=\underbrace{(A^{-1}A)}_{I_n}(AB)\underbrace{(BB^{-1})}_{I_n}$

תרגיל:

נתון $A_{n\times n}$

הוכח $A^2+3A-I_n=0 \longleftrightarrow A$ הפיכה כך ש- $A^{-1}=A+3I_n$

הוכחה:

(←) נתון: $A^2+3A-I_n=0$

צ"ל: A הפיכה כך ש- $A^{-1}=A+3I_n$

$A(\underbrace{A+3I_n}_{A^{-1}})=I_n \leftarrow A^2+3A=I_n \leftarrow A^2+3A-I_n=0$

$\leftarrow \underbrace{AA^{-1}}_{I_n}=I_n \leftarrow A$ הפיכה כך ש- $A^{-1}(A+3I_n)$

(→) נתון: A הפיכה כך ש- $A^{-1}=A+3I_n$

צ"ל: $A^2+3A-I_n=0$

A הפיכה כך ש- $A^{-1}=A+3I_n \leftarrow A\cdot A^{-1}=I_n$ כך ש- $A^{-1}=A+3I_n$

$\leftarrow A(A+3I_n)=I_n$

$\leftarrow A^2+3A=I_n$

$\leftarrow A^2+3A-I_n=0$

3.

לינארית - תרגול 9

דטרמיננטה:

הגדרה:

עבור: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

הדטרמיננטה של A היא $\det(A)=a_{11}a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$

1. א. $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1\cdot 4-2\cdot 3=4-6=-2$

ב. $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 1\cdot 4-2\cdot 2=4-4=0$

ג. $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1\cdot 1-0\cdot 0=1-0=1$

ד. $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 1\cdot 3-2\cdot 0=3-0=3$

ה. $\det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = 0\cdot 0-2\cdot(-2)=0-(-4)=4$

סימון: $\det(A)=|A|$

2. א. $0=|A|=\begin{vmatrix} t-1 & 1 \\ 4 & t+2 \end{vmatrix}$

$$0=(t-1)(t+2)-4$$
$$t^2-t+2t-2-4=0$$
$$t^2+t-6=0$$
$$t_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=2,-3$$

.1

פיתוח לפי שורה 1:

$$|C|=\begin{vmatrix}1&-1&4\\2&4&5\\-1&2&1\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}4&5\\2&1\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}2&5\\-1&1\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}2&4\\-1&2\end{vmatrix}$$

$$=1\cdot(4-10)+1\cdot(2+5)+4(4+4)=-6+7+32=33$$

פיתוח לפי עמודה שניה.

$$|C|=\begin{vmatrix}1&-1&4\\2&4&5\\-1&2&1\end{vmatrix}=-(-1)\cdot\begin{vmatrix}2&5\\-1&1\end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix}1&4\\-1&1\end{vmatrix}-(2)\cdot\begin{vmatrix}1&4\\2&5\end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot(2+5)+4\cdot(1+4)-2(5-8)=7+20-2\cdot(-3)=33$$

$$-16+10-2=-8$$

$$|C|=\left|\begin{array}{ccc|cc}1&-1&4&1&-1\\2&4&5&2&4\\-1&2&1&-1&2\end{array}\right| \qquad 25-(-8)=25+8=33$$

$$4+5+16=25$$

$$0+8+0=8$$

$$|A|=\left|\begin{array}{ccc|cc}2&1&0&2&1\\-1&3&4&-1&3\\1&1&0&1&1\end{array}\right| \qquad 4-8=-4$$

$$0+4+0=4$$

$$0+2-8=-6$$

$$|B|=\left|\begin{array}{ccc|cc}-1&2&3&-1&2\\4&0&-2&4&0\\2&1&-1&2&1\end{array}\right| \qquad 4-(-6)=4+6=10$$

$$0-8+12=4$$

.2

פיתוח עמודה 3

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0\cdot\cancel{|\ |} - 4\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0\cdot\cancel{|\ |} =$$

$$= -4\cdot(2-1) = -4$$

פיתוח שורה 2

$$|B| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - (-2)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0\cdot\cancel{|\ |}$$

$$= -4\cdot(-2-3) + 2(-1-4) = 20-10 = 10$$

.4

פיתוח לפי עמודה 2

$$0 = |A| = \begin{vmatrix} 2 & t-1 & -1 \\ t-2 & 0 & -3 \\ -4 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = -(t-1)\cdot\begin{vmatrix} t-2 & -3 \\ -4 & t-1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(t-1)\cdot((t-2)(t-1) - (-4\cdot(-3))) = (1-t)\cdot(t^2 - t - 2t + 2 - 12)$$

$$= (1-t)\cdot(t^2 - 3t - 10) = t = 1, 5, -2$$

$t=1$

.6

.c

פיתוח שורה 1

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & 6 & -4 \\ 2 & -6 & 18 & 8 \\ -5 & 6 & 9 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 6 & 6 & -4 \\ -6 & 18 & 8 \\ 6 & 9 & 0 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 0 & 6 & -4 \\ 2 & -6 & 8 \\ -5 & 6 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 6 & 6 \\ 2 & -6 & 18 \\ -5 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

פיתוח שורה 3

$$\begin{vmatrix} 6 & 6 & -4 \\ -6 & 18 & 8 \\ 6 & 9 & 0 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 18 & 8 \end{vmatrix} - 9\cdot\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} = 6\cdot(48+72) - 9\cdot(48-24) = 720-216=50$$

$-120+0+0$

$$\begin{vmatrix} 0 & 6 & -4 \\ 2 & -6 & 8 \\ -5 & 6 & 9 \end{vmatrix}\begin{matrix} 0 & 6 \\ 2 & -6 \\ -5 & 6 \end{matrix} = -288-(-120) = -288+120 = -168$$

$0-240-48 = -288$

.3

$$180+0+108=288$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & 6 & 6 & 0 & 6 \\ 2 & -6 & 18 & 2 & -6 \\ -5 & 6 & 9 & -5 & 6 \end{array}\right| = 612-288=324$$

$$0+540+72=612$$

$$\cancel{324} \quad \cancel{360}$$

$$504-3(-168)-2(-756)=2520$$

תשובה נכונה.

$$|D|=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} = 2\cdot(-3)\cdot 5\cdot(-8)=240$$

כל מטריצה
משולשת אז
הדטר מיוחד
לה מכפלת
האלכסון.

$$A=\begin{pmatrix} h & k & 0 & i & 0 \\ 0 & j & 0 & h & 0 \\ b & c & a & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f & 0 \\ 0 & m & 0 & g & k \end{pmatrix} \overset{\text{שורה } 4}{=} f\begin{vmatrix} h & k & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 & 0 \\ b & c & a & e \\ 0 & m & 0 & k \end{vmatrix} = fakhj$$

$$\overset{\text{עמודה } 3}{=} a\cdot\begin{vmatrix} h & k & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & m & k \end{vmatrix} = a\cdot khj = akhj$$

$$\overset{\text{עמודה } 3}{=} k\cdot(hj-0)$$

6. שאלה 6 תרגיל מטריצות.

נתון: $A_{n\times n}$ כך ש- $A+A^{-1}=2I_n$

צ"ל: k טבעי $A^k+A^{-k}=2I_n$

הוכחה: אינדוקציה על k.

שלב 1: $k=1$ $A+A^{-1}$ נתון

שלב 2: נניח נכונות עבור $k=m$

נתון $A^m+A^{-m}=2I_n$

שלב 3: צ"ל נכונות עבור $k=m+1$

צ"ל: $A^{m+1}+A^{-(m+1)}=2I_n$

נתון: $A+A^{-1}=2I_n$ — $A^{m-1}+A^{-(m-1)}$

$$A^m+A^{-m}=2I_n$$

$$(A+A^{-1})(A^m+A^{-m})=2I_n$$

$$A^{m+1}+A^{-m+1}+A^{m-1}+A^{-(m+1)}=4I_n$$

$$A^{m+1}+A^{-(m+1)}+\underbrace{A^{-(m-1)}+A^{m-1}}_{\text{לפי } 2I_n}=4I_n$$

$$A^{m+1}+A^{-(m+1)}+2I_n=4I_n$$

$$A^{m+1}+A^{-(m+1)}=2I_n$$

.5

5.5 תרגילים

1. חשב את הדטרמיננטות של המטריצות הבאות:

א. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ד. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ה. $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

2. מהו t כך ש- $|A| = 0$ עבור:

א. $A = \begin{pmatrix} t-1 & 1 \\ 4 & t+2 \end{pmatrix}$ ב. $A = \begin{pmatrix} t-2 & 1 \\ 2 & t-3 \end{pmatrix}$

3. חשב את הדטרמיננטות של המטריצות הבאות:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ו- $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

4. מהו t כך ש- $|A| = 0$ עבור:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & t-1 & -1 \\ t-2 & 0 & -3 \\ -4 & 0 & t-1 \end{pmatrix}$$

5. חשב $|A|$ עבור:

א. $A = \begin{pmatrix} 14 & 2 & 11 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 10 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ ב. $A = \begin{pmatrix} n & k & 0 & i & 0 \\ 0 & j & 0 & h & 0 \\ b & c & a & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f & 0 \\ 0 & m & 0 & g & k \end{pmatrix}$

6. חשב באמצעות תכונות הדטרמיננטה את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 6 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 6 & 7 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & 6 & -4 \\ 2 & -6 & 18 & 8 \\ -5 & 6 & 9 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

7. חשב הדטרמיננטות הבאות:

א. $\begin{vmatrix} 30 & 0 & 3 \\ 42 & -28 & 21 \\ -24 & 2 & -4 \end{vmatrix}$

ב. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

8. נתונות המטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 8 & 3 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -7 \\ 0 & 4 & 14 \\ 3 & -4 & -21 \end{pmatrix}$$

חשב את הביטויים הבאים: $|A|$, $|B|$, $|A^4|$, $|AB|$, $|A^{-1}|$, $|AB^{-1}A^{-1}|$

9. ~~הוכח ללא חישוב ישיר, שהדטרמיננטה הבאה מתחלקת ב— 24.~~

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix} \longleftarrow$$

לחשב דטרמיננטה.

שם: עומר אלון

100

לינארית - שיעורי בית ד

דף "תרגיל מטריצות":

8

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2+2R_1 \to R_2 \\ R_3+R_1 \to R_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \frac{R_1}{-1} \to R_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \frac{R_2}{2} \to R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1-2R_2 \to R_1 \\ R_3-3R_2 \to R_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 2 & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right) \frac{2R_3}{3} \to R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & -1 & \frac{2}{3} \end{array}\right) R_2+\frac{1}{2}R_3 \to R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & -1 & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

:$XA=B$

$$X \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

דף "תרגיל":

4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a_{12} + a_{13} = \frac{1}{2} \longleftarrow -1 + 2a_{12} + 2a_{13} = 0$$

$$a_{22} + a_{23} = 0 \longleftarrow 2a_{22} + 2a_{23} = 0$$

-1

R_2 לא יכולה להיות שורת אפסים. לכן $a_{23}\neq 1$, אז $a_{22}\neq 0$ לכן חייב שיתקיים $a_{22}=1$:

$$a_{12}=0 \rightarrow \qquad 0+a_{13}=\tfrac{1}{2} \qquad 1+a_{23}=0$$

$$a_{13}=\tfrac{1}{2} \qquad a_{23}=-1$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5 משתנים חופשיים: x_4

משתנים קשורים: x_1, x_2, x_3

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 1 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.5s+1 \\ 2 \\ 2-0.5s \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(0.5s+1)+a_{14}s=1 \rightarrow s(0.5+a_{14})=0 \rightarrow 0.5+a_{14}=0 \rightarrow a_{14}=-0.5$$

$$2+a_{24}s=2 \rightarrow a_{24}s=0 \rightarrow a_{24}=0$$

$$2-0.5s+a_{34}s=2 \rightarrow a_{34}s-0.5s=0 \rightarrow s(a_{34}-0.5)=0 \rightarrow a_{34}=0.5$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \end{pmatrix}$$

6

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

משתנים חופשיים: x_3

משתנים קשורים: x_1, x_2, x_4

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & 1 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-1+2a_{13}=0 \rightarrow 2a_{13}=1 \rightarrow a_{13}=\tfrac{1}{2}$$

$$2+2a_{23}=0 \longrightarrow 2a_{23}=-2 \longrightarrow a_{23}=-1$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.2

7 משתנים חופשיים: x_3, x_4

משתנים קשורים: x_1, x_2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+s-2t \\ 1 \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$1+s-2t+sa_{13}+ta_{14}=1 \rightarrow s(a_{13}+1)+t(a_{14}-2)=0 \rightarrow a_{13}=-1,\ a_{14}=2$$

$$1+sa_{23}+ta_{24}=1 \rightarrow a_{23}=0,\ a_{24}=0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8 משתנים חופשיים: x_2

משתנים קשורים: x_1, x_3, x_4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t-0.5 \\ t \\ -1.5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -1.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$t-0.5+a_{12}t=-0.5 \longrightarrow t(a_{12}+1)=0 \rightarrow a_{12}=-1$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9 משתנים חופשיים: x_4

משתנים קשורים: x_1, x_2, x_3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 1 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$2+3a_{14}=0 \rightarrow 3a_{14}=-2 \rightarrow a_{14}=\frac{-2}{3}$$

$$4+3a_{24}=0 \rightarrow 3a_{24}=-4 \rightarrow a_{24}=\frac{-4}{3}$$

$$-2+3a_{34}=0 \rightarrow 3a_{34}=2 \rightarrow a_{34}=\frac{2}{3}$$

3

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&a_{14}\\0&1&0&a_{24}\\0&0&1&a_{34}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$-1+a_{14}=0 \rightarrow a_{14}=1$

$-2+a_{24}=0 \rightarrow a_{24}=2$

$1+a_{34}=0 \rightarrow a_{34}=-1$

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

13 משתנים חופשיים: x_4

משתנים קשורים: x_1,x_2,x_3

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&a_{14}\\0&1&0&a_{24}\\0&0&1&a_{34}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2-2t\\t+2\\t\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix}$$

$2-2t+a_{14}t=a \rightarrow t(a_{14}-2)=a-2 \rightarrow a_{14}-2=\frac{a-2}{t} \rightarrow a_{14}=\frac{a-2}{t}+2$

$t+2+a_{24}t=b \rightarrow t(1+a_{24})=b-2 \rightarrow a_{24}+1=\frac{b-2}{t} \rightarrow a_{24}=\frac{b-2}{t}-1$

$t+a_{34}t=0 \rightarrow t(a_{34}+1)=0 \rightarrow a_{34}=-1$

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{a-2}{t}+2\\0&1&0&\frac{b-2}{t}-1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

28

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc}2&2&1&0\\1&2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&0&1\\2&2&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_2-2R_1\rightarrow R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&0&1\\0&-2&1&-2\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{R_2}{-2}\rightarrow R_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&0&1\\0&1&-\frac{1}{2}&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_1-2R_2\rightarrow R_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&-1\\0&1&-\frac{1}{2}&1\end{array}\right)\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$$

$$B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \; R_3 - 2R_1 \to R$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - 3R_2 \to R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & -2 \end{array}\right) \; \frac{R_3}{-1} \to R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 - R_3 \to R_1 \\ R_2 - R_3 \to R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_3 \leftrightarrow R_1 \\ \frac{R_1}{-1} \to R_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 - 2R_1 \to R_2 \\ R_3 - 4R_1 \to R_3 \\ R_4 - 3R_1 \to R_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 + R_2 \to R_1 \\ R_3 - 4R_2 \to R_3 \\ R_4 - 3R_2 \to R_4 \end{array}$$

-5

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 1 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & 0 & -3 & -3 & 1 \end{array}\right) \quad \frac{R_3}{-8} \to R_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & 0 & -3 & -3 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} R_1 - 2R_3 \to R_1 \\ R_2 - 4R_3 \to R_2 \\ R_4 + 6R_3 \to R_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-3}{4} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-3}{4} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

29

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} R_2 - 2R_1 \to R_2 \\ R_3 + R_1 \to R_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} R_2 \leftrightarrow R_3 \\ \frac{R_2}{-1} \to R_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} R_1 + R_2 \to R_1 \\ R_3 - 3R_2 \to R_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad \frac{R_3}{6} \to R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} R_1 + R_3 \to R_1 \\ R_2 + 3R_3 \to R_2 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{-1}{2} \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

$$B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \frac{R_1}{-1} \to R_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} R_2 - 3R_1 \to R_2 \\ R_3 - 2R_1 \to R_3 \end{array}$$

6

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 \leftrightarrow R_3 \\ \frac{R_2}{3} \to R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 + R_2 \to R_1 \\ \frac{R_3}{-2} \to R_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 - R_3 \to R_1 \\ R_2 + R_3 \to R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-5}{6} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{-5}{6} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AB = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) R_1 \leftrightarrow R_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) R_3 - R_1 \to R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \frac{R_1}{3} \to R_1 \\ \frac{R_2}{6} \to R_2 \\ \frac{R_3}{2} \to R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 - \frac{1}{3}R_3 \to R_1 \\ R_2 + \frac{2}{3}R_3 \to R_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \qquad (AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$B^t = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) R_2 \leftrightarrow R_1 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 + R_1 \to R_2 \\ R_3 + 2R_1 \to R_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) R_2 \leftrightarrow R_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) R_2 - R_3 \to R_2$$

.7

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \frac{R_2}{-2} \to R_2 \\ \frac{R_3}{3} \to R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1+3R_2 \to R_1 \\ R_1-R_3 \to R_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{6} & \frac{-5}{6} & \frac{-3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right) \qquad (B^t)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & \frac{-5}{6} & \frac{-3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

לא ניתן
לדרג אז
אין מטריצה
הפוכה.

.30

.א

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} \frac{1}{50} & \frac{1}{50} & 1 & 0 \\ \frac{1}{100} & \frac{1}{50} & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} 50R_1 \to R_1 \\ 100R_2 \to R_2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 50 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 100 \end{array}\right) R_2-R_1 \to R_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 50 & 0 \\ 0 & 1 & -50 & 100 \end{array}\right) R_1-R_2 \to R_1 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 100 & -100 \\ 0 & 1 & -50 & 100 \end{array}\right) \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 100 & -100 \\ -50 & 100 \end{pmatrix}$$

.ב

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{2}{10} & \frac{3}{10} & \frac{4}{10} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{10} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} 10R_1 \to R_1 \\ 10R_2 \to R_2 \\ 10R_3 \to R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 10 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right) R_1 \leftrightarrow R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 10 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 10 & 0 & 0 \end{array}\right) R_3-2R_1 \to R_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 10 & 0 & -20 \end{array}\right) R_3-3R_2 \to R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 10 & -30 & -20 \end{array}\right) \frac{R_3}{-1} \to R_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & 30 & 20 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1-R_3 \to R_1 \\ R_2-R_3 \to R_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 10 & -30 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & -20 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & 30 & 10 \end{array}\right) \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & -30 & -10 \\ 10 & -20 & -20 \\ -10 & 30 & 10 \end{pmatrix}$$

.8

31

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad R_1 - R_2 \to R_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{R_1}{2} \to R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B=\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{R_1}{4} \to R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad R_2 + 2R_1 \to R_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

ישנה שורת אפסים ולכן המטריצה אינה ניתנת לדירוג
ולכן אינה הפיכה.

$$C=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{R_1}{2} \to R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 - 3R_1 \to R_2 \\ R_3 - 5R_1 \to R_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & \frac{-3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & \frac{-5}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{R_2}{4} \to R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-3}{8} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 6 & 7 & \frac{-5}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \quad R_3 - 6R_2 \to R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-3}{8} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 7 & \frac{-1}{4} & \frac{-3}{2} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{R_3}{7} \to R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-3}{8} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{28} & \frac{-3}{14} & \frac{1}{7} \end{array}\right)$$

$$C^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-3}{8} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{-1}{28} & \frac{-3}{14} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

$$D=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 - 2R_1 \to R_2 \\ R_3 - 4R_1 \to R_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \frac{R_2}{2} \to R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - 3R_2 \to R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 1 & 14 \end{array}\right) \quad \frac{R_3}{2} \to R_3$$

.9

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1+R_3 \to R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} & 8 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} & 7 \end{array}\right)$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} & 8 \\ \frac{1}{2} & 0 & -2 \\ \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} & 7 \end{pmatrix}$$

$$E = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 4 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \frac{R_2}{-1} \to R_2 \\ R_1 \leftrightarrow R_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2-2R_1 \to R_2 \\ R_3-3R_1 \to R_3 \\ R_4-4R_1 \to R_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R - R_2 \to R_3 \\ \frac{R_4}{-3} \to R_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-4}{3} & 0 & \frac{-1}{3} \end{array}\right) \begin{array}{l} R_4-R_3 \to R_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-7}{3} & -1 & \frac{-1}{3} \end{array}\right)$$

ישנה שורת אפסים ולכן המטריצה אינה ניתנת לדירוג ולכן אינה הפיכה.

33.
10.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

<u>נבדוק את הפיכה:</u>

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_2]{\frac{R_2}{-1} \to R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right) R_2 - 2R_1 \to R_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{R_2}{7} \to R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array}\right) R_1 + R_2 \to R_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{-5}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array}\right) \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{-5}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

$$AX = B \to X = A^{-1}B \to \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{-5}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} - \frac{10}{7} \\ \frac{3}{7} + \frac{4}{7} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-7}{7} \\ \frac{7}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x_1 = -1 \quad x_2 = 1$$

ט.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

<u>נבדוק את הפיכה:</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{R_1}{2} \to R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) R_3 - 5R_1 \to R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{-5}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \leftrightarrow R_3]{-2R_3 \to R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_3 - 2R_2 \to R_3 \\ R_1 - \frac{1}{2}R_2 \to R_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -9 & -10 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{R_3}{-9} \to R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{10}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{-4}{9} \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 + 3R_3 \to R_1 \\ R_2 - 5R_3 \to R_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-5}{9} & \frac{5}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{10}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{-4}{9} \end{array}\right) \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-5}{9} & \frac{5}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{10}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{-4}{9} \end{pmatrix}$$

11.

$$AX=B \rightarrow X=A^{-1}\cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-5}{9} & \frac{5}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{10}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{-4}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{3} + \frac{-2}{3} + \frac{1}{3} \\ \frac{-5}{9} + \frac{10}{9} + \frac{-2}{9} \\ \frac{10}{9} + \frac{-2}{9} + \frac{4}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{3} \\ \frac{3}{9} \\ \frac{12}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} X_1 = 1 \\ X_2 = \frac{1}{3} \\ X_3 = \frac{4}{3} \end{matrix}$$

יב. 34. A ההפיכה (כבר חישבנו): (עמוד 4).

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{-1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$AX=B \rightarrow X=A^{-1}B \rightarrow \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+(-1) \\ -1+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$X_1 = 1 \qquad X_2 = -2$$

ג. C ההפיכה (כבר חישבנו): (עמוד 5 ו-6)

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-3}{4} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad AX=B \rightarrow X=A^{-1}B$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-3}{4} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1+(-1) \\ -6+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$X_1 = 2 \qquad X_2 = 4 \qquad X_3 = -2 \qquad X_4 = -3$$

לינארית - שיעורי בית

שם: עמית לוזון

100

4. B, A מטריצות הפיכות מסדר n.

$$AB=BA \iff A^{-1}B=BA^{-1}$$

$(\Leftarrow)$ נתון: $AB=BA$

צ"ל: $A^{-1}B=BA^{-1}$

הוכחה:

$$AB=BA$$
$$(AB)^{-1}=(BA)^{-1}$$
$$B^{-1}A^{-1}=A^{-1}B^{-1}$$
$$B\cdot B^{-1}A^{-1}=B\cdot A^{-1}B^{-1}$$
$$A^{-1}=BA^{-1}B^{-1}$$
$$A^{-1}B=BA^{-1}BB^{-1}$$
$$A^{-1}B=BA^{-1}$$

$(\rightarrow)$ נתון: $A^{-1}B=BA^{-1}$

צ"ל: $AB=BA$

הוכחה:

$$A^{-1}B=BA^{-1}$$
$$A^{-1}BA=BA^{-1}A$$
$$A^{-1}BA=B$$
$$AA^{-1}BA=AB$$
$$BA=AB$$

6. נתון ①: $A\in M_n(\mathbb{R})$

נתון ②: $A+A^{-1}=2I_n$

צ"ל: $A^k+A^{-k}=2I_n$

דוגמא למטריצה 2×2 שמקיימת: $A+A^{-1}=2I_n$

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\quad A+A^{-1}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$$

מטריצת היחידה מקיימת את כלל זה.

נוכיח באינדוקציה:

(בדוק עבור $k=1$ (הוכחנו כבר שזה נכון)

$$A^{1}+A^{-1}=2I_2$$

נוכיח עבור $n=k+1$

$$A^{k}+A^{-k}=2I_n$$

$$A^{k+1}+A^{-k+1}=2I_n$$

$$A^{k}\cdot A+A^{-k}\cdot A^{-1}=2I_n$$

$$\underbrace{(A+A^{-1})}_{\text{הנחת האינדוקציה}}\cdot(A^{k}+A^{-k})=2I_n$$

$$A^{k}+A^{-k}=2I_n$$

19 נתון A, B הפיכות.

$(\leftarrow)$: נתון: $A+B$ הפיכה

צ"ל: $A^{-1}+B^{-1}$ הפיכה

A, B הפיכות לכן גם A^{-1}, B^{-1} הפיכות

<u>הוכחה:</u>

$$A+B \Rightarrow A^{-1}\cdot(A+B)\cdot B^{-1}$$

$$=(A^{-1}A+A^{-1}B)\cdot B^{-1}$$

$$=(I_n+A^{-1}B)\cdot B^{-1}$$

$$=(I_nB^{-1}+A^{-1}B\cdot B^{-1})$$

$$=B^{-1}+A^{-1}$$

$$=A^{-1}+B^{-1}$$

$(\rightarrow)$: נתון: $A^{-1}+B^{-1}$ הפיכה

צ"ל: $A+B$ הפיכה.

<u>הוכחה:</u>

$$A^{-1}+B^{-1}\Rightarrow A\cdot(A^{-1}+B^{-1})\cdot B$$

$$=(A\cdot A^{-1}+A\cdot B^{-1})\cdot B$$

$$=(I_n+A\cdot B^{-1})\cdot B$$

$$=(I_nB+A\cdot B^{-1}B)$$

$= B + A$

$\cancel{= A + B}$

29

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
1 & 1 & -1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{array}\right) \quad \frac{R_1}{-1} \to R_1$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
1 & 1 & -1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{array}\right) \quad \begin{array}{l} R_2 + R_1 \to R_2 \\ R_3 + R_1 \to R_3 \\ \vdots \\ R_n + R_1 \to R_n \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
2 & -2 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
2 & 0 & -2 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
2 & 0 & 0 & \cdots & -2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \frac{R_2}{2} \to R_2 \\ \frac{R_3}{2} \to R_3 \\ \vdots \\ \frac{R_n}{2} \to R_n \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\
1 & 0 & -1 & \cdots & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2}
\end{array}\right) \quad R_1 - R_2 - R_3 - \dots - R_n \to R_1$$

חישוב a_{11} (שמאל):

$$1-(n-1)$$
$$= 1-n+1$$
$$= 2-n$$

חישוב a_{11} (ימין):

$$-1-\left(\frac{-(n-1)}{2}\right)$$
$$= -1-\left(\frac{1-n}{2}\right)$$
$$= \frac{n-3}{2}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
2-n & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{n-3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \cdots & \frac{-1}{2} \\
1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\
1 & 0 & -1 & \cdots & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2}
\end{array}\right) \quad \frac{R_1}{2-n} \to R_1$$

3

חישוב a_{11} (ימין):

$$\frac{\frac{n-3}{2}}{\frac{2-n}{1}} = \frac{n-3}{2(2-n)}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|ccccc}
1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 & \frac{n-3}{2(2-n)} & \frac{-1}{2(2-n)} & \frac{-1}{2(2-n)} & \cdots & \frac{-1}{2(2-n)} \\
1 & -1 & 0 & \cdots & & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\
1 & 0 & -1 & \cdots & & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & 0 & 0 & \cdots & & -1 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2}
\end{array}\right)$$

$R_2 - R_1 \to R_2$

$R_3 - R_1 \to R_3$

$\vdots$

$R_n - R_1 \to R_n$

$$\left(\begin{array}{cccccc|ccccc}
1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 & \frac{n-3}{2(2-n)} & \frac{-1}{2(2-n)} & \frac{-1}{2(2-n)} & \cdots & \frac{-1}{2(2-n)} \\
0 & -1 & 0 & \cdots & & 0 & \frac{1}{2(2-n)} & \frac{5-2n}{2(2-n)} & \frac{1}{2(2-n)} & \cdots & \frac{1}{2(2-n)} \\
0 & 0 & -1 & \cdots & & 0 & \frac{1}{2(2-n)} & \frac{1}{2(2-n)} & \frac{5-2n}{2(2-n)} & \cdots & \frac{1}{2(2-n)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & & -1 & \frac{1}{2(2-n)} & \frac{1}{2(2-n)} & \frac{1}{2(2-n)} & \cdots & \frac{5-2n}{2(2-n)}
\end{array}\right)$$

$\frac{R_2}{-1} \to R_2$

$\frac{R_3}{-1} \to R_3$

$\vdots$

$\frac{R_n}{-1} \to R_n$

$$\left(\begin{array}{cccccc|ccccc}
1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 & \frac{n-3}{2(2-n)} & \frac{-1}{2(2-n)} & \frac{-1}{2(2-n)} & \cdots & \frac{-1}{2(2-n)} \\
0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 & \frac{-1}{2(2-n)} & \frac{2n-5}{2(2-n)} & \frac{-1}{2(2-n)} & \cdots & \frac{-1}{2(2-n)} \\
0 & 0 & 1 & \cdots & & 0 & \frac{-1}{2(2-n)} & \frac{-1}{2(2-n)} & \frac{2n-5}{2(2-n)} & \cdots & \frac{-1}{2(2-n)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & & 1 & \frac{-1}{2(2-n)} & \frac{-1}{2(2-n)} & \frac{-1}{2(2-n)} & \cdots & \frac{2n-5}{2(2-n)}
\end{array}\right)$$

30 A הפיכה ומקיימת:

$$(I+A)^{-1} = I + A^{-1} \iff A^2 + A + I = 0$$

$(\Leftarrow)$: נתון: $A^2+A+I=0$

צ"ל: X שמקיים $(I+A)\cdot X = I$

הוכחה:

$$X + AX = I$$

$$AX + A^2X = A$$

לפי נתון:

$$AX + (-A-I)\cdot X = A$$

$$AX - AX - X = A$$

$$X = -A$$ .4

הוכחנו ש- $(I+A)^{-1} = -A$

צ"ל: $(I+A)^{-1} = I+A^{-1}$

<u>הוכחה:</u>

$$I+A^{-1} = -A$$

$$I+A^{-1}+A=0$$

$$A+I+A^2=0$$

$$A^2+A+I=0$$

זה נתון ולכן הוכחנו.

$(\Leftarrow)$: נתון: $(I+A)^{-1} = I+A^{-1}$

צ"ל: $A^2+A+I=0$

<u>הוכחה:</u>

$$(I+A)\cdot(I+A^{-1}) = I$$

$$I+A+A^{-1}+I = \cancel{I}$$

$$I+A+A^{-1}=0$$

$$A+A^2+I=0$$

$$A^2+A+I=0$$

.ס

לינארית - תרגול 10

דטרמיננטות:

1.7

החלפת שורות/עמודות = מכפילים ב- 1-.

$$|A|=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_4} = -1\begin{vmatrix}1&1&1&3\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\3&1&1&1\end{vmatrix}\quad \begin{matrix}R_2-R_1\to R_2\\R_3-R_1\to R_3\\R_4-3R_1\to R_4\end{matrix}$$

השורה שמכניסים לוקחים רק פעם אחת.

$$=-1\cdot\begin{vmatrix}1&1&1&3\\0&2&0&-2\\0&0&2&-2\\0&-2&-2&-8\end{vmatrix}\overset{\text{פיתוח לפי עמודה 1}}{=} -1\cdot\begin{vmatrix}2&0&-2\\0&2&-2\\-2&-2&-8\end{vmatrix}=$$

הוצאת גורם משותף משורה או עמודה. =

$$=-1\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}2&0&-1\\0&2&-1\\-2&-2&-4\end{vmatrix}\leftarrow /-2 \;=\; -1\cdot 2\cdot(-2)\begin{vmatrix}2&0&-1\\1&2&-1\\1&1&2\end{vmatrix}\begin{matrix}2&0\\0&2\\1&1\end{matrix} = 4(8+4)=48$$

$-2-2+0=-4$

$8+0+0=8$

1.8

$$|A|=\begin{vmatrix}9&3&3&3\\3&9&3&3\\3&3&9&3\\3&3&3&9\end{vmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_4} =(-1)\cdot\begin{vmatrix}3&3&3&9\\3&9&3&3\\3&3&9&3\\9&3&3&3\end{vmatrix}=(-1)\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot$$

$$\begin{vmatrix}1&1&1&3\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\3&1&1&1\end{vmatrix}=3^4\left(\text{תרגיל } 1.7\right) = 3888$$

3.1

$$\begin{vmatrix}t+3&-1&1\\7&t-5&1\\6&-5&t+2\end{vmatrix}\xrightarrow{R_1-R_2\to R_1}\begin{vmatrix}t-4&-1-(t-5)&0\\7&t-5&1\\6&-5&t+2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t-4&4-t&0\\7&t-5&1\\6&-5&t+2\end{vmatrix}=$$

$$=(t-4)\cdot\begin{vmatrix}1&-1&0\\7&t-5&1\\6&-5&t+2\end{vmatrix}=\underset{C_2+C_1\to C_2}{\overset{\text{עמודות}}{}}=(t-4)\cdot\begin{vmatrix}1&0&0\\7&t+2&1\\6&1&t+2\end{vmatrix}\overset{\text{לפי שורה 1}}{=}$$

.1

$$= (t-4)\cdot\begin{vmatrix} t+2 & 1 \\ 1 & t+2 \end{vmatrix} = (t-4)\left[(t+2)^2-1\right] = (t-4)\cdot(t^2+4t+3)$$

מסקנה:

מטריצה A הפיכה $\longleftrightarrow$ $|A|\neq 0$.

$$(t-4)\cdot(t^2+4t+3)\neq 0$$

$\leftarrow$ $t-4\neq 0$ וגם $t^2+4t+3\neq 0$

$\leftarrow$ $t\neq 4$ וגם $t_{1,2}=\frac{-4\pm 2}{2} \begin{cases} -3 \\ -1 \end{cases}$

$$t\neq -3,-1,4$$

4.1

$$\begin{vmatrix} a+b & a & a & \cdots & a \\ a & a+b & a & \cdots & a \\ a & a & a+b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & a+b \end{vmatrix}_{n\times n} \quad R_1+R_2+\dots+R_n\to R_1$$

$$\begin{vmatrix} na+b & na+b & na+b & \cdots & na+b \\ a & a+b & a & \cdots & a \\ a & a & a+b & \cdots & a \\ \vdots & & & & \\ a & a & a & \cdots & a+b \end{vmatrix} =$$

$$(na+b)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a+b & a & \cdots & a \\ a & a & a+b & \cdots & a \\ \vdots & & & & \\ a & a & a & \cdots & a+b \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} R_2-aR_1\to R_2 \\ R_3-aR_1\to R_3 \\ \vdots \\ R_n-aR_1\to R_n \end{matrix}$$

.2

$$= (na+b)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix} = (na+b)\cdot b^{n-1}$$

4.2

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ y & z & x & 1 \\ z & x & y & 1 \\ \frac{2y+z}{3} & \frac{2z+x}{3} & \frac{2x+y}{3} & 1 \end{vmatrix} = \overset{R_4 - \frac{2R_2+R_3}{3} \to R_4}{=} \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ y & z & x & 1 \\ z & x & y & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

אם יש שורה או עמודה של אפסים אז הדטרמיננטה היא אפס!

פתרון משוואות בשיטה קרמר:

$$x+2y+3z=9$$
$$4x+5y+6z=10$$
$$7x+8y+8z=11$$

$64+48+105=217$

$$\left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{matrix}$$

$40+84+96=220$

$$220-217=3\neq 0$$

יש פתרון בשיטת קרמר. ($|A|\neq 0$)

חישוב x: (עמודת הפתרון במקום הראשונה)

$160+432+165=757$

$$\left|\begin{matrix} 9 & 2 & 3 \\ 10 & 5 & 6 \\ 11 & 8 & 8 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 9 & 2 \\ 10 & 5 \\ 11 & 8 \end{matrix}$$

$160+132+240=732$

$$732-757=-25 \qquad x=\frac{-25}{3}$$

$$x=\frac{\text{det Kramer}}{\text{det original}}$$

3.

חישוב y:

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 4 & 10 & 6 \\ 7 & 11 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_2-4R_1\to R_2 \\ R_3-7R_1\to R_3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 0 & -26 & -6 \\ 0 & -52 & -13 \end{vmatrix} \overset{\text{עמודה 1}}{=} \begin{vmatrix} -26 & -6 \\ -52 & -13 \end{vmatrix} = -26\cdot\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -26(-13+12) = 26 \qquad y=\frac{26}{3}$$

חישוב z:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 4 & 5 & 10 \\ 7 & 8 & 11 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_2-4R_1\to R_2 \\ R_3-7R_1\to R_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 0 & -3 & -26 \\ 0 & -6 & -52 \end{vmatrix} R_3-2R_2\to R_3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 0 & -3 & -26 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$z=\frac{0}{3}=0$$

9.

פתרון יחיד $0\neq$

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & k & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} k & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & k \end{matrix} = -k^2+3k-2$$

$$-k^2+3k-2\neq 0 \qquad k_{1,2}=\frac{-3\pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

פתרון יחיד $k\neq 1,2$

חישוב X_1:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & 2 & 1 \\ 1 & k & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ k & 2 \\ 1 & k \end{matrix} \quad 2+1+k^2-(k+k+2) = k^2-2k+1$$

$$X_1=\frac{k^2-2k+1}{-k^2+3k-2}$$

חישוב X_2:

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} k & 1 \\ 1 & k \\ 1 & 1 \end{matrix} \quad k^2+1+1-(1+k+k) = k^2-2k+1$$

$$X_2=\frac{k^2-2k+1}{-k^2+3k-2}$$

.4

$$X_1 = X_2$$

$$\frac{k^2-2k+1}{-k^2+3k-2} = \frac{k^2-2k+1}{-k^2+3k-2}$$

אם $k \neq 1,2$

$$k^2-2k+1 = k^2-2k+1$$

$$0 = 0$$

אם $k \neq 1,2$

דרך II:

$k=1$

עבור $k=1$:
אינסוף פתרונות.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 - R_1 \to R_2 \\ R_3 - R_1 \to R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

$k=2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) R_1 \leftrightarrow R_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 - 2R_1 \to R_2 \\ R_3 - R_1 \to R_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \leftarrow$$ אין פתרון

לסיכום:

$k \neq 1,2$ פתרון יחיד

$k=1$ אינסוף פתרונות

$k=2$ אין פתרון.

7.2

$$\begin{vmatrix} 1 & k & k & k \\ k & 1 & k & k \\ k & k & 1 & k \\ k & k & k & 1 \end{vmatrix} R_1+R_2+R_3+R_4 \to R_1 \begin{vmatrix} 3k+1 & 3k+1 & 3k+1 & 3k+1 \\ k & 1 & k & k \\ k & k & 1 & k \\ k & k & k & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(3k+1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & k & k \\ k & k & 1 & k \\ k & k & k & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} R_2 - kR_1 \to R_2 \\ R_3 - kR_1 \to R_3 \\ R_4 - kR_1 \to R_4 \end{array} = (3k+1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-k \end{vmatrix} =$$

-5

$(3k+1)\cdot(1-k)^3 \neq 0$

פתרון יחיד.

$1-k \neq 0$ וגם $3k+1 \neq 0$

$k \neq 1$ וגם $k \neq -\frac{1}{3}$ פתרון יחיד.

$k=1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2-R_1\to R_2 \\ R_3-R_1\to R_3 \\ R_4-R_1\to R_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

אין פתרון.

$k=-\frac{1}{3}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & -2 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2+\frac{1}{3}R_1\to R_2 \\ R_3+\frac{1}{3}R_1\to R_3 \\ R_4+\frac{1}{3}R_1\to R_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{8}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{4}{3} \\ 0 & -\frac{4}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{7}{3} \\ 0 & -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{8}{9} & \frac{10}{3} \end{array}\right) \begin{array}{l} R_4+R_2+R_3 \\ \to R_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

אין פתרון

סיכום:

$k \neq -\frac{1}{3}, 1$ פתרון יחיד

$k=-\frac{1}{3}, k=1$ אין פתרון

לא קיים k עבורו יש אינסוף פתרונות.

.6